O Guia Completo para Quem Não É C.D.F.

Cálculo

Tradução da 2ª Edição

Entenda facilmente as aulas com explicações infalíveis e diversos problemas para praticar

W. Michael Kelley

ALTA BOOKS
EDITORA

Sobre o autor

W. Michael Kelley é um professor de matemática ganhador de prêmios do condado de Calvert, Maryland. Ele se formou em matemática no St. Mary's College em 1994 com dois objetivos em mente: (1) tornar a matemática algo mais fácil para todos que cruzassem o seu caminho, e (2) aprender a se comunicar com guaxinins e se infiltrar em sua estrutura social complexa. Como os remédios para resfriado e gripe foram acabando, ele decidiu se ater ao primeiro objetivo apenas.

Durante seus sete anos como professor do Ensino Médio, ele recebeu muitas honras e foi reconhecido como professor notável por inúmeras organizações, inclusive pelo Conselho de Professores de Matemática de Maryland. Porém, ele deu mais valor para a votação dos alunos: a de professor favorito a cada ano que ensinava cálculo. Ou eles adoravam seu senso de humor excêntrico ou o fato de ele passar menos lição de casa às sextas-feiras.

Kelley também lecionou em universidades, em alguns cursos de cálculo. Na verdade, um de seus alunos lhe deu de presente uma camiseta com a fórmula quadrática, para agradecê-lo por ter ensinado aquela fórmula aos alunos por meio de uma música que ele havia escrito. Até hoje ele não sabe em que ocasião deve usar essa camiseta, mas achou essa atitude muito gentil.

Ele também mantém o site www.calculus-help.com, que tem sido elogiado por muitos, inclusive pela Associação Educacional Nacional e pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática. O site começou como uma fonte para exercícios e ferramentas de cálculo. Ele posta um novo problema a cada semana para ajudar aqueles que têm de lutar contra o monstro cálculo. Se gostar deste livro ou tiver qualquer coisa a dizer sobre ele, mande um e-mail para Michael pelo site.

Michael escreveu a primeira edição deste livro em 2001, e logo se tornou um best-seller da série no exterior, mesmo sendo o segundo livro dele. Cinco anos depois, já havia escrito mais seis livros, e não parou por aí.

Cálculo

O Guia Completo para Quem Não É C.D.F.

Cálculo

Tradução da 2ª Edição

por W. Michael Kelley

ALTA BOOKS
EDITORA
Rio de Janeiro, 2013

O Guia Completo para Quem Não É C.D.F. — Cálculo, Tradução da 2ª Edição Copyright © 2013 da Starlin Alta Editora e Consultoria Eireli. ISBN: 978-85-7608-747-2

Translated from original The Complete Idiot's Guide to Calculus © 2006 by W. Michael Kelley. ISBN 978-1-59257-471-1. This translation is published and sold by permission Peguin Group, the owner of all rights to publish and sell the same. PORTUGUESE language edition published by Starlin Alta Editora e Consultoria Eireli, Copyright © 2013 by Starlin Alta Editora e Consultoria Eireli.

Todos os direitos reservados e protegidos por Lei. Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da editora, poderá ser reproduzida ou transmitida.

Erratas: No site da editora relatamos, com a devida correção, qualquer erro encontrado em nossos livros. Procure pelo título do livro.

Marcas Registradas: Todos os termos mencionados e reconhecidos como Marca Registrada e/ou Comercial são de responsabilidade de seus proprietários. A Editora informa não estar associada a nenhum produto e/ou fornecedor apresentado no livro.

Impresso no Brasil

Vedada, nos termos da lei, a reprodução total ou parcial deste livro

Produção Editorial
Editora Alta Books

Gerência Editorial
Anderson Vieira

Supervisão de Texto
Jaciara Lima

Supervisão de Qualidade Editorial
Sergio Luiz de Souza

Supervisão Gráfica & Editorial
Angel Cabeza

Conselho de Qualidade Editorial
Anderson Vieira
Angel Cabeza
Jaciara Lima
Marco Aurélio Silva
Natália Gonçalves
Sergio Luiz de Souza

Editoria de Séries
Claudia Braga
Thiê Alves

Equipe de Design
Bruna Serrano
Iuri Santos

Equipe Editorial
Brenda Ramalho
Cristiane Santos
Daniel Siqueira
Danilo Moura
Evellyn Pacheco
Juliana de Paulo
Juliana Larissa Xavier
Kellen Aires
Licia Oliveira
Livia Brazil
Marcelo Vieira
Milena Souza
Paulo Camerino
Pedro Sá
Vanessa Gomes
Vinicius Damasceno

Tradução
Melina Castro

Revisão Gramatical
Carla Ayres
Patricia Chaves

Revisão Técnica
Paulo Sérgio Costa Lino
Mestre em Matemática Pura
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

Diagramação
Lúcia Quaresma

Marketing e Promoção
Daniel Schilklaper
marketing@altabooks.com.br

1ª Edição, 2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

K29g Kelley, W. Michael.
O guia completo para quem não é C.D.F. : cálculo / por W. Michael Kelley. – Rio de Janeiro, RJ : Alta Books, 2013.
356 p. : il. ; 24 cm. – (O guia completo para quem não é C.D.F)

Inclui índice e apêndice.
Tradução de: The Complete Idiot's Guide to Calculus (2. ed.).
ISBN 978-85-7608-747-2

1. Cálculo - Estudo e ensino. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral. 4. Equações diferenciais. 5. Sequências (Matemática). 6. Séries (Matemática). I. Título. II. Série.

CDU 517.2/.3
CDD 515

Índice para catálogo sistemático:
1. Cálculo 517.2/.3

(Bibliotecária responsável: Sabrina Leal Araujo – CRB 10/1507)

ALTA BOOKS
EDITORA

Rua Viúva Cláudio, 291 – Bairro Industrial do Jacaré
CEP: 20970-031 – Rio de Janeiro – Tels.: 21 3278-8069/8419 Fax: 21 3277-1253
www.altabooks.com.br – e-mail: altabooks@altabooks.com.br
www.facebook.com/altabooks – www.twitter.com/alta_books

Sumário Resumido

Parte 1: As Raízes do Cálculo **1**

1 Afinal, o que É Cálculo? 3
Todos já ouviram falar sobre cálculo, mas a maioria das pessoas não o reconheceria se topasse com ele por aí.

2 Refine Suas Habilidades em Álgebra 13
Espane as teias de aranha e remova as traças que saltam para fora do seu livro de álgebra quando você o abre.

3 Equações, Relações e Funções – Essa Não! 25
Antes de se encontrar com o Senhor do cálculo, você terá de se encontrar com seus capangas.

4 Trigonometria: A Última Parada Antes do Cálculo 37
É hora de entender exatamente, e de uma vez por todas, o que significa cosseno e por que ele não tem nada a ver com empréstimos.

Parte 2: Assentando as Bases do Cálculo **53**

5 Chegue ao Limite 55
Aprenda a aferir as intenções de uma função – será que elas são sempre honestas?

6 Avaliando Limites Numericamente 65
Como devo organizar o meu estudo em casa? Deveria levar uma hora!

7 Continuidade 77
Garantindo uma caminhada agradável pelo resto do curso.

8 O Quociente Diferencial 89
Hora de conhecer o limite mais famoso de todos cara a cara. Faça um penteado ou algo assim.

Parte 3: A Derivada **99**

9 Entendendo as Leis das Derivadas 101
Todas as regras e leis das derivadas em um delicioso banquete self-service!

10 Regras Gerais de Diferenciação 113
As tarefas que você teria de fazer diariamente se sua madrasta má fosse professora de matemática.

11 Usando Derivadas em Gráficos 123
Como colocar uma curva em seu gráfico, ou por que os puritanos não curtiam cálculo.

12 Derivadas e Movimento 135
Introdução à posição, velocidade, aceleração e à gata Amendoim!

13 Aplicações Comuns das Derivadas 143
Os esquentadinhos do mundo das derivadas.

Parte 4: A Integral 155

14 Aproximando Áreas 157
Se você puder encontrar a área de um retângulo, você está no jogo.

15 Antiderivadas 167
Assim que estiver craque em dirigir, é hora de dar marcha à ré e ver o que acontece.

16 Aplicações do Teorema Fundamental 177
Você pode fazer tanto com algo tão simples como integrais definidos que vai se sentir um Bill Gates da matemática.

17 Dicas de Integração para Frações 187
Você terá de integrar frações até cansar, então é bom que se entenda com elas já.

18 Métodos Avançados de Integração 197
Evolua de aprendiz de integração a mestre artesanal.

19 Aplicações da Integração 207
Quem diria que gráficos de rotação tridimensionais seriam tão divertidos?

Parte 5: Equações Diferenciais, Sequências, Séries e Saudações 219

20 Equações Diferenciais 221
Exatamente como as equações normais, mas com um recheio cremoso.

21 Visualizando Equações Diferenciais 231
O que poderia ser mais divertido do que desenhar um monte de segmentos lineares pequenininhos?

22 Sequências e Séries 243
Se uma lista infinitamente grande de números não for empolgante o bastante, tente somá-los!

23 Testes de Convergência de Séries Infinitas 251
Será que você vai mesmo chegar a algum lugar com aquela lista enorme?

24 Séries Especiais 263
Séries que acham que são funções (acho que já vi isso na TV).

25 Teste Final 275
Quanto o seu cérebro absorveu? Você está craque em cálculo? Prepare-se para testar seus conhecimentos.

Apêndices

A Respostas de "Você Tem Problemas" 293

B Glossário 319

Índice 331

Sumário

Parte 1: As Raízes do Cálculo 1

1 Afinal, o que É Cálculo? 3

Qual É o Propósito do Cálculo? ... 4

Determinando a Inclinação das Curvas ... 4

Calculando a Área de Formas Bizarras ... 4

Justificando Velhas Fórmulas ... 5

Calculando Raízes Complicadas ... 5

Visualizando Gráficos ... 5

Encontrando o Valor Médio de uma Função ... 5

Calculando Valores Ótimos ... 6

Quem É o Responsável por Isso? ... 7

Influências do Passado ... 7

Newton vs. Leibniz ... 9

Será que Vou Aprender Isso um Dia? ... 11

2 Refine Suas Habilidades em Álgebra 13

Andando na Linha: Equações Lineares ... 14

Formas Comuns de Equações Lineares ... 14

Calculando a Inclinação ... 16

Você Tem o Poder: Regras Exponenciais ... 17

A Separação É Difícil: Fatoração de Polinômios ... 19

Máximo Divisor Comum ... 20

Modelos Especiais de Fatoração ... 20

Resolvendo Equações Quadráticas ... 21

Primeiro Método: Fatoração ... 21

Segundo Método: Completando o Quadrado ... 22

Terceiro Método: A Fórmula Quadrática ... 23

3 Equações, Relações e Funções – Essa Não! 25

Como Se Comporta uma Função? ... 26

Simetria Funcional ... 28

Gráficos para Saber de Cor ... 30

Construindo uma Função Inversa ... 31

Equações Paramétricas ... 33

O que É um Parâmetro? ... 33

Conversão para a Forma Retangular ... 33

4 Trigonometria: A Última Parada Antes do Cálculo 37
Tornando-se Repetitivo: Funções Periódicas ... 38
Introdução às Funções Trigonométricas ... 39
Seno (y = sen x) ... 39
Cosseno (y = cos x) ... 39
Tangente (y = tan x) ... 40
Cotangente (y = cot x) ... 41
Secante (y = sec x) ... 42
Cossecante (escrita como y = csc x) ... 43
Qual É o Seno: O Círculo Unitário ... 44
Identidades Incrivelmente Importantes ... 46
Identidades Pitagóricas ... 47
Fórmulas de Duplo Ângulo ... 49
Resolvendo Equações Trigonométricas ... 50

Parte 2: Assentando as Bases do Cálculo 53

5 Chegue ao Limite 55
O que É Limite? ... 56
Pode Alguma Coisa Ser Nada? ... 57
Limites Laterais ... 58
Quando Existe um Limite? ... 60
Quando Não Existe um Limite? ... 61

6 Avaliando Limites Numericamente 65
Os Principais Métodos ... 66
Método da Substituição ... 66
Método da Fatoração ... 67
Método da Conjugação ... 68
E Se Nada Funcionar? ... 70
Limites e Infinito ... 70
Assíntotas Verticais ... 71
Assíntotas Horizontais ... 72
Teoremas Especiais de Limite ... 74

7 Continuidade 77
O que É Continuidade? ... 78
A Definição Matemática de Continuidade ... 79
Tipos de Descontinuidade ... 81
Descontinuidade por Saltos ... 81
Ponto de Descontinuidade ... 83
Descontinuidade Infinita/Essencial ... 84
Descontinuidade Removível e Não-removível ... 85
Teorema do Valor Intermediário ... 87

8 O Quociente Diferencial 89
Quando uma Secante Se Torna uma Tangente ... 90
Querida, Encolhi o Δx ... 91
Aplicando o Quociente Diferencial ... 95
O Quociente Diferencial Alternativo ... 96

Parte 3: A Derivada 99

9 Entendendo as Leis das Derivadas 101
Quando Existe uma Derivada? ... 102
Descontinuidade ... 102
Vértice no Gráfico ... 102
Tangente Vertical ... 103
Técnicas de Derivadas Básicas ... 104
A Regra da Potência ... 104
A Regra do Produto ... 105
A Regra do Quociente ... 106
A Regra da Cadeia ... 107
Taxas de Variação ... 109
Derivadas Trigonométricas ... 111

10 Regras Gerais de Diferenciação 113
Encontrando Equações de Tangentes ... 114
Diferenciação Implícita ... 115
Diferenciando uma Função Inversa ... 117
Derivadas de Funções Paramétricas ... 120

11 Usando Derivadas em Gráficos 123
Extremos Relativos ... 124
Encontrando Números Críticos ... 124
Classificando Extremos ... 125
O Gráfico de Sinal ... 127
O Teorema do Valor Extremo ... 129
Determinando a Concavidade ... 131
Outro Gráfico de Sinal ... 132
Teste da Segunda Derivada ... 133

12 Derivadas e Movimento 135
Equação de Posição ... 136
Velocidade ... 138
Aceleração ... 139
Movimento de Projéteis ... 140

13 Aplicações Comuns das Derivadas 143
Avaliando os Limites: Regra de L'Hôpital ... 144
Outros Teoremas de Existência ... 145

Teorema do Valor Médio *146*
Teorema de Rolle *148*
Taxas Relacionadas 148
Otimização 151

Parte 4: A Integral 155

14 Aproximando Áreas 157
Somas de Riemann 158
Soma à Direita e à Esquerda *159*
Soma Média *161*
Regra do Trapézio 162
Regra de Simpson 165

15 Antiderivadas 167
A Regra da Potência para Integração 168
Integração de Funções Trigonométricas 170
Teorema Fundamental do Cálculo 171
Parte I: Áreas e Integrais Relacionadas *171*
Parte II: Derivadas e Integrais São Opostas *172*
Substituição *U* 174

16 Aplicações do Teorema Fundamental 177
Calculando a Área entre Duas Curvas 178
O Teorema do Valor Médio para Integração 180
Uma Interpretação Geométrica *180*
Teorema do Valor Médio *182*
Encontrando Distâncias Percorridas 183
Funções de Acumulação 185

17 Dicas de Integração para Frações 187
Separação 188
Mágica da Substituição *U* e Divisão Longa 189
Integrando com Funções Trigonométricas Inversas 191
Completando o Quadrado 193
Selecionando o Método Correto 194

18 Métodos Avançados de Integração 197
Integração por Partes 198
O Método da Força Bruta *198*
O Método Tabular *200*
Integração por Frações Parciais 201
Integrais Impróprias 203

19 Aplicações da Integração 207
Volume de Sólidos Rotacionais ... 208
O Método do Disco ... 208
O Método da Rosquinha ... 211
O Método das Cascas Cilíndricas ... 213
Comprimento do Arco ... 215
Equações Retangulares ... 215
Equações Paramétricas ... 216

Parte 5: Equações Diferenciais, Sequências, Séries e Saudações 219

20 Equações Diferenciais 221
Separação de Variáveis ... 222
Tipos de Solução ... 223
Família de Soluções ... 224
Soluções Específicas ... 224
Crescimento e Declínio Exponencial ... 225

21 Visualizando Equações Diferenciais 231
Aproximação Linear ... 232
Campos de Direção ... 234
Método de Euler ... 237

22 Sequências e Séries 243
O que É uma Sequência? ... 244
Convergência da Sequência ... 244
O que É uma Série? ... 245
Série Básica Infinita ... 247
Série Geométrica ... 248
Série p ... 249
Série Telescópica ... 249

23 Testes de Convergência de Séries Infinitas 251
Que Teste Você Usa? ... 252
Teste da Integral ... 252
Teste da Comparação ... 253
Teste da Comparação do Limite ... 255
Teste da Razão ... 257
Teste da Raiz ... 258
Séries com Termos Negativos ... 259
Teste da Série Alternada ... 259
Convergência Absoluta ... 261

24 Séries Especiais 263
Séries de Potência 264
Raio de Convergência *264*
Intervalo de Convergência *267*
Série de Maclaurin 268
Série de Taylor 272
25 Teste Final 275

Apêndices

A Respostas de "Você Tem Problemas" 293
B Glossário 319
Índice 331

Prefácio

Essa é nova: um livro de cálculo que não se leva muito a sério! Posso dizer honestamente que, em todos os meus anos de especialista em matemática, nunca tinha visto um livro como este antes.

Meu nome é Danica McKellar. Sou, antes de tudo, atriz e diretora de cinema (provavelmente mais reconhecida pelo meu papel como Winnie Cooper, em *Anos Incríveis*), mas há algum tempo decidi me desviar disso por quatro anos e me especializei em matemática na University of California. Durante esses anos, também fui coautora de um novo teorema de matemática e me tornei uma estudiosa reconhecida. O que posso dizer? Eu adoro matemática!

Mas vamos encarar! Você não comprou este livro porque adora matemática. E não há nada de errado com isso. Na verdade, a maioria das pessoas não ama matemática do jeito que eu amo... ou de qualquer outro jeito. Este livro não foi feito para os especialistas da área que querem cada aspecto técnico de cada conceito explicado a eles com riqueza de detalhes.

Foi feito para cada especialista em biologia que precisa passar por dois semestres de cálculo para cumprir as exigências da Universidade. Ou para cada aluno que sempre fugiu de fórmulas matemáticas como o diabo foge da cruz, mas que de repente tem de lidar com um livro inteiro cheio delas. Conheci um estudante que migrou de química para inglês para evitar cálculo!

Kelley fornece explicações que lhe dão uma ideia geral dos conceitos de cálculo e então introduz ferramentas específicas (e truques!) para resolver alguns dos problemas rotineiros que você pode encontrar nas aulas de cálculo.

Pode respirar aliviado. O conteúdo deste livro não vai exigir de você o que outros livros de cálculo exigem. Achei as explicações dadas aqui amigáveis e casuais em geral. As definições não são sofisticadamente acuradas, mas trazem consigo a essência do que afinal o seu livro de estudo tentava descrever com suas palavras matemáticas difíceis. Na verdade, não considero este um livro de estudo de forma alguma. Aqui você vai encontrar uma conversa em forma de texto que segurará a sua mão, fará piadas e o apresentará aos tópicos mais importantes necessários para suas atuais aulas de cálculo. O tom amigável aqui utilizado é uma ruptura com a natureza clínica dos outros livros de matemática que já li.

E há também as ricas metáforas de Michael Kelley que comparam funções lineares com as partes do corpo do Frankenstein. Bem, você vai entender quando chegar lá.

Meu conselho é fazer a leitura desses capítulos como uma introdução inofensiva aos conceitos básicos do cálculo e, depois, a título de comparação, revisitar o seu livro de estudo. As explicações do seu livro de estudo irão fazer mais sentido depois da leitura deste livro, e você se sentirá muito mais confiante e qualificado para apreciar os detalhes específicos exigidos em classe. Então, você poderá controlar o nível de detalhamento e crítica que você quer, em termos de precisão matemática, para o seu entendimento consultando seu livro de estudos, aquele que não é amigável.

Parabéns por perseguir o nobre objetivo do cálculo! E parabéns por ser pró-ativo e comprar este livro. Você não encontrará companhia mais amigável como suplemento para o seu livro escolar mais rigoroso.

Boa sorte!

Danica McKellar
Atriz, Bacharel em Matemática Pura com menção honrosa *Summa Cum Laude* pela University of California.

Introdução

Sejamos honestos. A maioria das pessoas quer aprender cálculo tanto quanto quer levar um coice de uma mula no rosto. Geralmente, elas precisam fazer um curso porque é exigido ou então porque estão muito perto da mula, nessa ordem. Cálculo é maçante, chato e nem mesmo lhe compra nada em seu aniversário.

Não é que você não tenha tentado entender cálculo; você até teve a ideia brilhante de tentar e leu o seu livro escolar. Foi uma piada e tanto. Você teria mais chances de ganhar o prêmio Nobel de Química do que entender uma palavra sequer. Talvez você até tenha pedido ajuda a algum amigo seu, mas parecia que você estava tentando se comunicar com um índio. Vocês simplesmente não falavam a mesma língua.

Você gostaria que alguém lhe explicasse as coisas em uma linguagem acessível, mas lá no fundo sabe que o dialeto do cálculo vai voltar para assombrá-lo. Você tem de entendê-lo para ser aprovado no curso e acha que não irá conseguir. Quer saber? Você conseguirá, sim.

As coisas nunca são tão ruins quanto parecem. A mula não queria te dar aquele coice e, além disso, eu conheço um ótimo cirurgião plástico. Também sei como cálculo é aterrorizante. A única coisa mais assustadora do que aprender cálculo é ensinar cálculo para 35 adolescentes em uma sala abafada e lotada antes do horário do almoço. Eu lutei na linha de frente dessas trincheiras e sobrevivi para contar. Posso até contar a história de um jeito que intrigue, divirta e ensine algo a você.

Vamos viajar juntos por um tempo. Deixe-me guiá-lo pela selva do cálculo. Já estive lá antes e conheço o caminho de volta. Meu objetivo é ensinar tudo o que você precisa para sobreviver por conta própria. Vou explicar tudo em uma linguagem simples e compreensível. Sempre que resolver um problema, vou mostrar cada passo (até mesmo os mais simples), e vou dizer exatamente o que estou fazendo e o porquê. Depois, você poderá praticar sozinho, sem a minha orientação. Mas não tenha medo: eu lhe darei todas as respostas no final do livro.

Não vou mentir para você. Nem todos os problemas serão tão fáceis, mas no fim você vai solucionar todos eles. Você só precisa de um empurrãozinho na direção certa e de alguém que entenda como se sente. Com todas essas coisas no lugar, você não encontrará problemas para dar um pontapé nisso tudo. Bem, desculpe. Talvez tenha escolhido mal as palavras.

Como Este Livro Está Organizado

Este livro é dividido em cinco partes.

Na **Parte 1**, **"As raízes do cálculo"**, você vai aprender por que o cálculo é útil e quais habilidades ele adiciona ao seu repertório matemático. Você também vai aprender um pouco de sua história, que é permeada por bastante controvérsia. Mas como eu sou um cara da Matemática e não da História, vou entrar no assunto sem delongas. No entanto, antes de começarmos a discutir os conceitos de cálculo,

vamos passar um tempo valioso revisando alguns conhecimentos de álgebra e trigonometria que são pré-requisitos.

Na **Parte 2**, **"Assentando as bases do cálculo"**, você vai colocar a mão na massa. É o momento pelo qual esteve esperando. Certo? A maioria das pessoas considera cálculo como o estudo das derivadas e integrais, mas nós não vamos falar sobre isso até a Parte 3. E olhe que não estou te atiçando, hein?! Primeiro, temos que falar sobre limites e continuidade. São conceitos fundamentais que constituem o alicerce do cálculo e, sem eles, as derivadas e integrais não existiriam.

Finalmente, vamos encontrar um dos maiores astros na **Parte 3**, **"A derivada"**. O nome diz tudo. Todas as suas perguntas serão respondidas, inclusive o que é uma derivada, como ela é encontrada, e o que devemos fazer quando damos de cara com uma delas em um beco escuro, à noite (corra!). Você também vai adquirir um monte de habilidades baseadas nas derivadas: construir gráficos de funções que você nunca viu, calcular com que rapidez as variáveis mudam em determinadas funções e encontrar limites que já foram quase impossíveis de calcular. Mas, calma, tem mais! Como algo chamado "gráfico de sinais" pode ser nada mais do que um monte de sinais?

Na **Parte 4**, **"A integral"**, você vai encontrar outra grande personalidade do cálculo. Integração é quase a mesma coisa que diferenciação, mas ao contrário. Intrigado? Você vai aprender como a área sob uma função se relaciona com sua derivada inversa, chamada "antiderivada". Também é hora de introduzir o Teorema Fundamental do Cálculo, que descreve de uma vez por todas como essas coisas malucas se relacionam. Você vai descobrir que integrais são um pouco mais desagradáveis do que derivadas, já que exigem o aprendizado de mais técnicas – e algumas delas são extremamente interessantes e (será possível?) até um pouco divertidas!

Agora que já conhecemos as personagens principais deste drama matemático, o que estaria faltando? Na **Parte 5**, **"Equações, sequências e séries diferenciais e saudações"**, você vai conhecer o elenco de apoio. Embora seus papéis sejam menores, o cálculo não seria cálculo sem eles. Você vai fazer experimentos com equações diferenciais usando campo de direção e o método de Euler, duas técnicas do cálculo que se tornaram populares na última década (e você pensando que o cálculo era a mesma coisa desde o início dos tempos...). Finalmente, você vai brincar com séries infinitas; elas parecem quebra-cabeças com os quais você brincava no jardim da infância ("Você sabe dizer qual é o próximo número nesse padrão de sequência?"). Depois de tudo isso, você fará uma prova final que abordará todo o conteúdo do livro e praticará ainda mais!

Extras

Como professor, eu vivia saindo pelas tangentes – tudo o que eu falava me lembrava de outra coisa. Esses fragmentos paralelos também são abordados neste livro. Aí vai um guia para os quadros que você vai encontrar pelas próximas páginas.

Ponto Crítico

Essas notinhas, dicas e pensamentos vão dar assistência, ensinar e divertir. Elas sempre adicionam algo ao tópico em questão, seja por meio de conselhos, conhecimento ou apenas algo para amenizar um pouco o clima.

Alerta do Kelley

Embora eu vá adverti-lo sobre as armadilhas e perigos encontrados pelo livro, os alertas destes quadros merecem atenção especial. Pense neles como caveiras e ossos pintados em plaquinhas pelo seu caminho. Dar atenção a eles pode poupar horas de frustração.

de•fi•ni•ção

O Cálculo é cheio de **palavras** e **frases** que soam loucas e "nerds". Para se tornar o Nerd Rei ou Rainha da matemática, você terá de entender o que elas significam.

Você Tem Problemas

A matemática não é um esporte para espectadores. Depois de discutirmos um tópico, explicarei como trabalhar com certo tipo de problema, e então você terá de tentar por você mesmo. Os problemas que você vai encontrar aqui serão bem parecidos com os que eu mencionarei nos capítulos, mas será a sua vez de brilhar. Ainda que as respostas estejam todas no Anexo A, você só deve checá-las para confirmar seus resultados.

Agradecimentos

Muitas pessoas me apoiaram, encorajaram e aturaram enquanto estava engajado na tarefa desafiadora de escrever um livro e, então, reescrevê-lo para a segunda edição. Embora eu não possa agradecer a todos aqueles que me ajudaram, gostaria de mencionar o nome de alguns aqui. Primeiramente, agradeço às pessoas que tornaram este livro possível: Jessica Faust (por me direcionar e me fazer dar vida a este "filhote"), Mike Sanders (que me mostrou o caminho da luz, e ainda o faz), Nancy Lewis (a única pessoa no mundo inteiro que realmente teve de ler tudo isto aqui) e Sue Strickland (que fez a revisão técnica do livro original, já que ela me apoia em tudo o que faço e gosta de dizer aos seus alunos da faculdade a quem recomenda o meu livro, "Eu sei. Eu estou nele").

Em um escopo mais pessoal, preciso agradecer a alguns.

Lisa, que torna a minha vida melhor e mais fácil simplesmente sendo ela mesma. Poucas pessoas teriam concordado em se casar comigo, sem contar em viver rodeada de três pessoinhas que um dia entenderão que a melhor forma de dizer

"estou com fome" não é gritando até se acabarem. Obrigado por sua paciência e bondade, e por sempre me dizer onde guardar a centrífuga de salada; Deus sabe que eu nunca vou aprender.

Aos meus filhos Nick, Erin e Sara. Apesar de todos os meus erros, eu os amo muito – e o melhor de tudo é que vocês já sabem disso e me amam também.

Não posso me esquecer de minha mãe, que trabalhava 200 horas por semana quando as coisas não iam bem em nossa casa, só para que vivêssemos melhor.

Dave, um grande amigo. Aprendi muito com você e, sem desmerecer isso, mais do que qualquer outra coisa, eu também detesto passar camisas.

Também aos amigos que sempre estiveram por perto: Rob (Nickels) Hasltead, Chris ("Cobra") Sarampote e Matt ("O profeta") Halnon, três caras com quem sempre dividi apartamentos esquálidos e muitos bons jogos de pôquer. Por conveniência, seus apelidos de pôquer foram mencionados aqui e, por motivos embaraçosos, o meu não.

Finalmente, agradeço ao Joe, que sempre me perguntava como o livro estava indo, e por ter me convencido de que ele seria um grande sucesso.

Agradecimento Especial à Revisora Técnica da Obra Original

Este livro foi revisado por Susan Strickland, uma especialista que checou várias vezes a precisão do que você está prestes a aprender aqui. O editor gostaria de estender nossos agradecimentos a Sue, que nos ajudou a garantir que o conteúdo deste livro fosse entendido corretamente por seus leitores.

Susan Strickland se formou bacharel em Matemática na Saint Mary's College, de Maryland, em 1979, tornou-se Mestre em matemática na Lehigh University, em Bethlehem, Pensilvânia, em 1982, e fez cursos de graduação em Educação Matemática na American University de Washington, de 1989 a 1991. Foi professora assistente de matemática e supervisionou professores de matemática em formação na Saint Mary's College, Maryland, de 1983 a 2001. No verão de 2001, ela aceitou o cargo de professora de matemática na College of Southern Maryland, onde espera trabalhar até se aposentar! Seus interesses incluem ensino de matemática para os matematicofóbicos, treinamento para professores de matemática, e resolução de jogos e enigmas envolvendo matemática.

Marca Registrada

Todos os termos mencionados neste livro que se referem a marcas registradas ou serviços foram apropriadamente escritos em letras maiúsculas. As editoras não se responsabilizam pela exatidão dessas informações. O uso de termos neste livro não deve ser visto como ameaça à validade de qualquer marca ou serviço registrado.

Parte 1

As Raízes do Cálculo

Você já ouviu falar de Newton, certo? Bem, Sir Isaac Newton é um dos dois homens responsáveis pelo cálculo em nossas vidas e em nossos currículos escolares. Na verdade, ele é apenas um dos homens que deveria carregar a culpa nas costas. A história do cálculo é longa, mas seus conceitos antecedem o homem. Antes de começarmos a estudar cálculo, vamos dar uma breve olhada em sua história e desenvolvimento para responder à pergunta mais repetida: "Por que eu tenho que aprender isso?".

Depois, é só partir para a prática das habilidades pré-requisito em matemática. Você não tentaria erguer 130 kg sem se aquecer antes, tentaria? Uma revisão rápida de equações lineares, fatores, equações quadráticas, propriedades das funções e trigonometria será essencial. Mesmo que você ache que já está pronto para mergulhar no cálculo, recomendo essa revisão. Aposto que você já se esqueceu de algumas coisas das quais precisará depois, então resolva isso agora!

Capítulo 1

Afinal, o que É Cálculo?

Neste Capítulo

- Por que cálculo é útil
- Origens históricas do cálculo
- A controvérsia da autoria
- Vou aprender isso algum dia?

A palavra "cálculo" pode significar uma dessas duas coisas: um método computacional ou um agregado mineral que se forma em órgãos ocos do corpo humano, como as pedras no rim – também chamados cálculos renais. Ambas as definições acabam por traduzir a dor e a agonia dos estudantes ao tentarem entender o assunto. É mais do que controverso sugerir que matemática não é um dos assuntos mais populares da educação contemporânea. Na verdade, o cálculo detém o posto de rei no reino do mal da matemática, principalmente pelos "matematicofóbicos". Representa um objetivo inalcançável, um sopro de confusão e complicações, e poucos se aventuram em seu reino, a não ser quando impulsionados por certas forças, como crescimento no trabalho ou exigência curricular. Ninguém além do professor de cálculo sabe o quanto as pessoas temem essa matéria.

Quando as pessoas descobrem que fui professor de cálculo, sentem-se na obrigação de dizer, com muitos detalhes, como exatamente eles se saíram no ensino médio com a matemática, em que assunto eles tiveram sucesso e por que eles acham que cálculo é a encarnação do mal. Meus barbeiros formam a maioria desse grupo de pessoas, não me pergunte por quê. Todos os colegas da barbearia

me conheceram como um estranho careca com um conhecimento enigmático e desconcertante de matemática.

Na maioria das vezes, os medos em relação ao cálculo são injustificáveis. O cálculo é apenas um passo à frente da álgebra do ensino médio e nada mais. Seguir continuamente uma série de etapas, exatamente como você faz com os problemas de álgebra, resolve a maior parte dos problemas de cálculo. Não nos interprete mal – cálculo nem sempre é algo fácil, e os problemas nem sempre são triviais, nem tão imponentes quanto parecem. O cálculo é uma ferramenta fascinante que admite inúmeras aplicações na vida real e, para vocês que gostam de novelas, carrega consigo uma das maiores controvérsias da história acerca de seus créditos.

Qual É o Propósito do Cálculo?

Cálculo é uma ferramenta versátil e útil, e não algo usado para apenas um propósito. Muitas de suas aplicações são atualizações diretas do mundo da álgebra – meios diferentes para atingir fins similares, mas em um número imensamente maior de situações. Ainda que seja impossível listar todos os usos do cálculo, a lista a seguir representa alguns pontos interessantes acerca das coisas que você terá aprendido ao final deste livro.

Ponto Crítico

O que nós chamamos de cálculo é chamado pelos acadêmicos de "o cálculo". Essa distinção é feita justamente pelo fato de que qualquer método de computação pode ser chamado de cálculo e porque descobertas do cálculo moderno são muito importantes. Pessoalmente, eu acho a terminologia um pouco pretensiosa e não a uso. Nunca alguém me perguntou "de que cálculo você está falando?".

Determinando a Inclinação das Curvas

Um dos tópicos iniciais da álgebra é a determinação da inclinação de uma linha – um valor numérico que descreve o quanto essa linha é inclinada. O cálculo nos oferece um método bem mais generalizado para determinar inclinações. É possível definir não apenas o nível da inclinação de uma linha, mas de qualquer inclinação em qualquer momento. Pode não parecer útil em um primeiro momento, mas se trata de uma das aplicações matemáticas mais convenientes de que se tem notícia.

Calculando a Área de Formas Bizarras

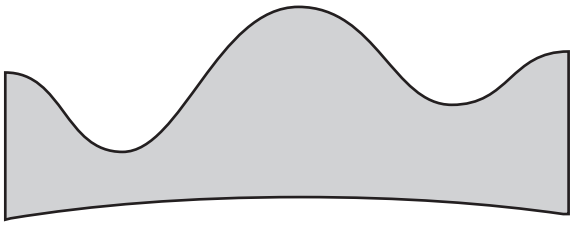
Sem cálculo, é difícil determinar a área de formas além daquelas cujas fórmulas você aprendeu em geometria. É claro que você pode ser "profissa" em encontrar a área de um círculo, quadrado ou retângulo, mas como você faria para calcular a área de uma forma como a que aparece na Figura 1.1?

Justificando Velhas Fórmulas

Houve uma época em sua vida matemática em que você confiava nas fórmulas. Às vezes ainda precisamos fazer isso, mas cálculo nos dá a oportunidade de finalmente verificar algumas daquelas velhas fórmulas, especialmente as de geometria. Sempre lhe disseram que o volume de um cone era um terço do volume de um cilindro de mesmo raio $\left(V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$, mas, através de um simples cálculo de rotação linear tridimensional, podemos, enfim, provar isso (aliás, o processo é mesmo muito simples, ainda que não pareça assim agora).

Figura 1.1

Calcular essa área? Certamente não estamos mais no Kansas...



Calculando Raízes Complicadas

Sem a ajuda de uma calculadora gráfica, é excepcionalmente difícil calcular uma *raiz irracional*. No entanto, um processo simples e repetitivo chamado Método de Newton (nome de Sir Isaac Newton) permite calcular uma raiz irracional em qualquer grau de exatidão que você desejar.

de•fi•ni•ção

Uma **raiz irracional** é uma intersecção com o eixo ***x*** que não é uma fração. Raízes fracionárias (ou racionais) são mais fáceis de determinar porque você pode tipicamente decompor a expressão para isso, um processo ensinado em aulas básicas de álgebra. Não existe um processo bom e genérico para encontrar raízes irracionais até que você use cálculo.

Visualizando Gráficos

Talvez você já tenha uma ideia sobre linhas e sobre como visualizar facilmente seus gráficos, mas e o gráfico de algo como $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$?

Regras elementares de cálculo básico determinam exatamente onde o gráfico será crescente, decrescente e curvilíneo. Na verdade, você pode encontrar o ponto mais alto e o mais baixo do gráfico sem desenhar um ponto sequer.

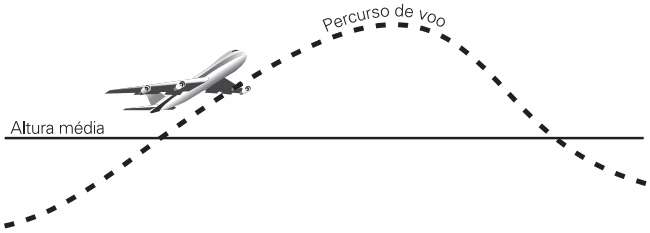
Encontrando o Valor Médio de uma Função

Qualquer um pode calcular a média de um grupo de números, havendo tempo e o desejo de dividir. Cálculo permite que você leve as suas habilidades com média

para um nível inteiramente novo. Agora você pode determinar, em média, a altura que uma função percorre em um período de tempo. Por exemplo, se você fizer um gráfico do caminho percorrido por um avião (veja a Figura 1.2), você pode calcular a média da altura de voo com pouco ou nenhum esforço. Determinar a velocidade e a aceleração média não é mais complicado do que isso. Talvez você nunca tenha tido esse impulso, mas tem de admitir que é certamente mais interessante do que calcular a média de números ímpares menores de 50.

Figura 1.2

Ainda que o percurso deste avião não seja definido por uma forma básica (como um semicírculo), você pode determinar o que quiser por meio de cálculo: a altitude média durante a viagem ou o número de amendoins que você deixou cair quando adormeceu.

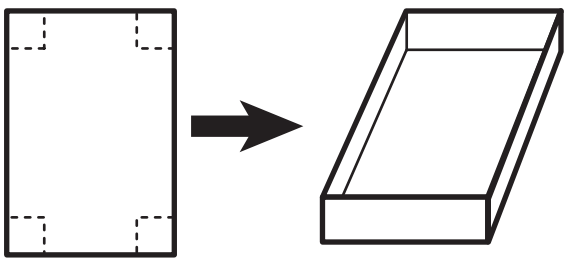


Calculando Valores Ótimos

Uma das aplicações mais alucinógenas de cálculo é a otimização de funções. Em apenas alguns poucos passos, você pode responder a perguntas do tipo "Se eu tiver 1.000 pés de cerca, qual a maior área que eu posso cercar?" ou "Dado um pedaço de papel retangular medindo 8,5 × 8 polegadas, qual a dimensão da caixa que eu consigo montar contendo o maior volume?". O método tradicional para criar uma caixa aberta a partir de uma superfície retangular é cortar quadrados congruentes nas extremidades do retângulo e, então, dobrar os lados resultantes para cima, como mostramos na Figura 1.3.

Figura 1.3

Com algumas dobras e cortes, você pode facilmente criar uma caixa aberta a partir de uma superfície retangular.



Eu costumo imaginar o aprendizado de cálculo e todas as suas aplicações como o crescimento repentino de um terceiro braço. É claro que, em um primeiro momento, parece engraçado ter um terceiro braço. Na verdade, eu estaria fazendo você se

destacar na multidão de um jeito bizarro. No entanto, com o tempo você encontraria diversas utilidades para o braço extra que jamais teria imaginado se não o tivesse.

Quem É o Responsável por Isso?

Rastrear a descoberta do cálculo não é tão fácil quanto, digamos, rastrear a descoberta dos alfinetes de segurança. Qualquer conceito matemático novo, em geral, é resultado de centenas de anos de investigação, debates e fracassos. Muitos chegam perto de tropeçar em conceitos-chave, mas apenas os poucos sortudos que finalmente fazem as ligações pequenas e mais relevantes recebem o crédito. Este é o caso do cálculo.

Cálculo é geralmente definido como a combinação de técnicas diferenciais e integrais que você aprenderá mais adiante. No entanto, os matemáticos históricos jamais teriam engolido os conceitos que aceitamos como verdadeiros hoje em dia. O ingrediente-chave que faltou na matemática da antiguidade foi a real noção do que é o infinito. Matemáticos e filósofos da época tiveram muitas dificuldades para conceituar quantidades infinitamente pequenas ou grandes. Tomemos o exemplo do filósofo grego Zenão de Eleia.

Influências do Passado

Zenão tomou uma posição bem controversa em filosofia matemática: ele argumentou que todo movimento é impossível. No paradoxo intitulado Dicotomia, ele utilizou um argumento convincente, para não dizer estranho, ilustrado na Figura 1.4.

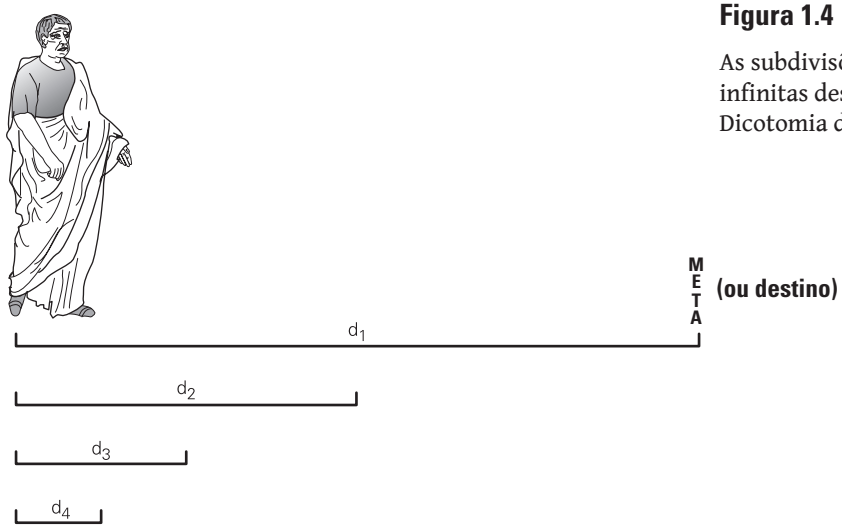


Figura 1.4

As subdivisões infinitas descritas na Dicotomia de Zenão.

Ponto Crítico

O paradoxo mais famoso de Zenão é a corrida entre uma tartaruga e o legendário Aquiles. Zenão sustenta que, se a tartaruga tivesse uma vantagem inicial, por menor que fosse, Aquiles jamais poderia cobrir essa distância. Para isso, ele teria de viajar metade da distância que os separa, e então metade dessa distância, e assim repetidamente, o que representa o mesmo dilema ilustrado pela Dicotomia.

No argumento de Zenão, o indivíduo da figura deseja viajar para a direita, seu destino final. Porém, antes que ele possa percorrer essa distância (d^1), ele precisa percorrer metade dela (*d2*). Faz sentido, já que *d2* é menor e vem antes no percurso. No entanto, antes que a distância *d2* seja completada, ele também precisa percorrer metade dela (*d3*). Este processo pode ser repetido indefinidamente, o que significa que o nosso pobre viajante deverá percorrer um número infinito de distâncias. Segundo Zenão, ninguém poderia fazer um número infinito de coisas em um período de tempo finito, já que uma lista infinita jamais será exaurida. Ou seja, não é que o homem nunca conseguirá chegar ao seu destino; ele na verdade nunca começará a se movimentar! Talvez seja esse o motivo de nunca conseguirmos fazer nada em uma sexta-feira à tarde.

Ponto Crítico

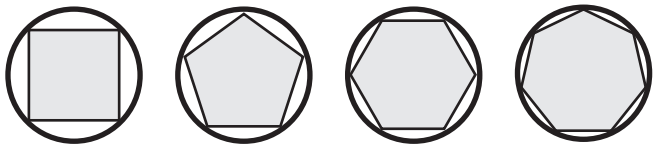
Caso o suspense esteja te matando, deixe-me estragar o final para você. A ligação essencial com o cálculo completo e a amenização da inquietação de todos sobre o comportamento infinito foi o conceito de limite, que construiu as bases para as derivadas e integrais.

Zenão não acreditava realmente que o movimento fosse impossível. Ele apenas gostava de desafiar as teorias de seus contemporâneos. O que lhe faltava, assim como aos gregos de seu tempo, era um bom entendimento sobre comportamento infinito. Era inconcebível que um número de coisas inumerável pudesse caber em um espaço medido e fixo. Hoje em dia, estudantes de geometria aceitam que um segmento linear contém um número infinito de pontos, ainda que possua uma extensão fixa. Exigiu-se o desenvolvimento de alguns conceitos razoáveis e, ainda assim, matematicamente sólidos acerca de quantidades muito grandes ou muito pequenas antes que o cálculo pudesse desabrochar.

Alguns matemáticos da antiguidade não se incomodavam com a aparente contradição de uma quantidade infinita dentro de um espaço finito. Notadamente, Euclides e Arquimedes conceberam o método da exaustão como técnica para determinar a área de um círculo, já que o valor exato de π não existiu por algum tempo. Nesta técnica, polígonos regulares foram inscritos em um círculo; quanto maior fosse o número de lados do polígono, mais perto ele estaria da área do círculo (veja a Figura 1.5).

Figura 1.5

Quanto maior o número de lados, mais perto da área do círculo o polígono inscrito fica.



Para que o método da exaustão (que tem um título conveniente em minha opinião) forneça o valor exato do círculo, o polígono precisaria ter um número infinito de lados. De fato, essa encarnação mágica da geometria pode apenas ser concebida teoricamente, e a ideia de uma forma com lados infinitos que poderia ter uma área finita perturbou muitos da época. No entanto, os estudantes de cálculo de hoje veem isso como um simples problema de limite. Como o número de lados se aproxima do infinito, a área do polígono se aproxima de πr^2, sendo que r é o raio do círculo. Limites são essenciais ao desenvolvimento das derivadas e integrais, dois componentes fundamentais do cálculo. Ainda que Newton e Leibniz estivessem com a maior descoberta do cálculo em curso por volta de 1600 e 1700, ninguém havia estabelecido uma definição de limite formal. Embora isso não nos faça perder o sono, foi no mínimo perturbador na época. Os matemáticos de todo o mundo passaram a dormir em paz por volta de 1751, quando Jean Le Rond d'Alembert escreveu *Encyclopédie* ("Enciclopédia") e estabeleceu a definição formal de limite. A definição delta-épsilon do limite que usamos hoje é muito próxima da definição de d'Alembert.

No entanto, antes de essa definição ser estabelecida, Newton tinha dado um "chute" muito bom de que o cálculo estava ganhando forma.

Newton vs. Leibniz

Sir Isaac Newton, nascido em 1642 com saúde precária, tendo se tornado um cara inteligente e renomado no mundo todo (até mesmo em sua época), disse uma vez: "Se eu enxerguei além de Descartes é porque me apoiei nos ombros de gigantes". Nada mais verdadeiro poderia ter sido dito sobre qualquer grande descoberta matemática, mas não vamos dar muito crédito ao cara por sua suposta modéstia... falaremos sobre isso logo mais. Newton percebeu que séries infinitas (como o método da exaustão) não apenas eram grandes "aproximadoras", mas, se pudessem realmente alcançar o infinito, determinavam valores exatos das funções que aproximavam. Por isso, comportavam-se de acordo com leis e restrições facilmente definíveis que, em geral, eram apenas aplicadas a funções conhecidas. Mais importante ainda, ele foi o primeiro a reconhecer e utilizar a relação inversa entre a inclinação de uma curva e a área sob ela.

A relação inversa (chamada contemporaneamente de Teorema Fundamental do Cálculo) fez de Newton o inventor do cálculo. Ele publicou seus resultados e sua definição intuitiva de limite em sua obra de 1687, chamada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. O *Principia*, como é conhecido hoje, é considerado por alguns (pessoas que chegam a considerar coisas desse tipo, eu suponho) como o maior trabalho científico de todos os tempos, com exceção de qualquer livro que ainda possa ser escrito por um comediante *stand-up*. O cálculo era utilizado para resolver os maiores dilemas científicos da época.

- Calcular o ângulo da linha tangente em qualquer ponto de sua extensão.
- Determinar a velocidade e a aceleração de um objeto a partir de uma função que descreve sua posição, e designar tal posição a partir da velocidade ou aceleração do objeto.

- Calcular a extensão de arcos, assim como o volume e a área da superfície de sólidos.
- Calcular os *extremos* relativos e absolutos de objetos, especialmente projéteis.

de•fi•ni•ção

Pontos **extremos** são pontos altos ou baixos de uma curva (máximo ou mínimo, respectivamente). Em outras palavras, representam valores extremos do gráfico, sejam eles extremamente altos ou baixos, em relação aos pontos que o rodeiam.

Ponto Crítico

Dez anos após a morte de Leibniz, Newton retirou o nome dele da terceira edição do *Principia* como um último insulto. Isso equivale, academicamente, a Newton jogar uma cadeira em Leibniz no programa Casos de Família (com o tema: "Você publicou a solução de um enigma matemático antigo antes de mim e eu estou loucamente contrariado!").

Porém, com grandes descobertas vêm grandes controvérsias, e esse é o caso do cálculo.

Entra em cena Gottfried Wilhelm Leibniz, uma criança prodígio e gênio da matemática. Leibniz nasceu em 1646 e terminou a faculdade com 17 anos, tornando-se bacharel. Pelo fato de ter sido primeiramente autodidata no campo da matemática, ele aprendeu sozinho importantes conceitos matemáticos muito tempo depois que alguém os publicara. Newton na verdade deu crédito a Leibniz em *Principia* por ter desenvolvido um método parecido com o dele. Tal método evoluiu para um conceito similar de Newton em cálculo e, na verdade, Leibniz publicou seu trabalho inovador inventando o cálculo *antes* de Newton, ainda que Newton tivesse feito exatamente a mesma descoberta anos antes dele. Alguns dizem que Newton era extremamente sensível a críticas e, por isso, demorou a publicar. A guerra matemática estava armada: quem inventou o cálculo antes e, portanto, mereceria o crédito por resolver um enigma de mais de mil anos?

Hoje em dia, Newton leva o crédito por ter inventado o cálculo antes, embora Leibniz leve crédito por sua primeira publicação. Além disso, a sombra do plágio e da dúvida foi levantada por Leibniz, e acredita-se que ele tenha descoberto o cálculo independentemente de Newton. Porém, duas facções distintas surgiram e tiveram uma breve guerra de argumentos. Os matemáticos britânicos colocavam-se do lado de Newton, enquanto os europeus do continente apoiavam Leibniz; e a guerra foi longa e difícil. Na verdade, os matemáticos britânicos eram efetivamente alienados do resto na comunidade matemática europeia por causa desse mal-estar, o que provavelmente motivou a falta de grandes descobertas matemáticas na Grã-Bretanha por algum tempo depois disso.

Embora Leibniz tenha sido omitido da descoberta do cálculo, muitas de suas contribuições perduram na linguagem e nos símbolos matemáticos. Em álgebra, ele foi o primeiro a utilizar um ponto para indicar multiplicação ($3 \cdot 4 = 12$) e dois

pontos para designar uma proporção (1:2 = 3:6). Em geometria, ele convencionou os símbolos para congruentes (≅) e similares (~). Os mais famosos, no entanto, são os símbolos das derivadas e integrais, que também utilizamos.

Será que Vou Aprender Isso um Dia?

História à parte, cálculo é um tópico irresistível de se estudar da perspectiva dos alunos. Há um número incrível de tópicos, alguns relacionados, mas a maioria não tem um sentido óbvio. No entanto, não há nenhum tópico em cálculo que seja muito difícil depois que você entende o que se espera de você. O truque é reconhecer rapidamente que tipo de problema está sendo apresentado e, então, atacá-lo com métodos que você vai ler e aprender neste livro.

Ponto Crítico

Leibniz também inventou o termo *função*, ensinado comumente nas aulas de álgebra do ensino fundamental. No entanto, a maioria das descobertas e inovações de Leibniz foi ofuscada por Newton, que realizou grandes feitos nas áreas da gravidade, movimento e ótica (entre outras). Eles eram mesmo rivais e muito competitivos.

Ensinei cálculo por muitos anos a adolescentes e adultos da mesma maneira, e acredito que há quatro passos básicos para se ter êxito no assunto:

- *Certifique-se de entender o que os termos técnicos significam*. Este livro trará os termos em linguagem simples para que você entenda não apenas o significado deles, mas também como se relacionam com o resto do seu conhecimento.
- *Examine as palavras complicadas dos teoremas importantes de cálculo e livre-se da linguagem difícil*. Matemática é como uma língua estrangeira – como francês e espanhol – para quem não domina os números, mas isso não quer dizer que você não possa entender teoremas complicados. Vou traduzir cada um deles para uma linguagem acessível e tornar todas as implicações básicas claras.
- *Desenvolva um instinto matemático*. Como já disse, vou ajudá-lo a reconhecer pistas sutis em problemas de cálculo. Em geral, os problemas dizem tudo, menos como exatamente devem ser resolvidos. Se você ler com cuidado, vai desenvolver um instinto, um tato que vai vibrar dentro de você e guiá-lo às respostas corretas. Isso só se alcança com prática, prática e prática, por isso trarei problemas com soluções detalhadas para ajudá-lo a navegar nas águas agitadas do cálculo.
- *Às vezes é necessário memorizar*. Há alguns tópicos mais avançados nessa área que são difíceis de ser comprovados. Na verdade, muitos teoremas não podem ser comprovados até que você faça cursos muito mais avançados de matemática.

Sempre que eu achar que comprovar um teorema vai fazê-lo entender melhor, eu o discutirei em detalhes. No entanto, se alguma fórmula, regra ou teorema tiver uma explicação que eu considere sem importância para o seu domínio do tópico em questão, vou omitir – e você terá de confiar que é o melhor a ser feito.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- O cálculo é o clímax da álgebra, geometria e trigonometria.
- O cálculo, enquanto ferramenta, permite alcançar proezas maiores do que os cursos de matemática que o precedem.
- Limites são fundamentais para o cálculo.
- Ambos, Newton e Leibniz, descobriram o cálculo de forma independente, embora Newton tenha feito isso primeiro.
- Com tempo e dedicação, qualquer um pode ser um aluno bem-sucedido de cálculo.

Capítulo 2

Refine Suas Habilidades em Álgebra

Neste Capítulo

- Criação de equações lineares
- Propriedades exponenciais
- Fatoração de polinômios
- Resolução de equações quadráticas

Se você é aspirante a estudante de cálculo, em algum momento no seu passado você provavelmente teve de encarar uma batalha com um monstro chamado álgebra. Poucas pessoas têm lembranças positivas em relação a isso, e comigo não foi diferente. Esqueça que me especializei em matemática, que fui professor de cálculo e que até levava a minha calculadora para a cama quando era jovem (triste, mas é verdade). Eu odiava álgebra por muitos motivos, e um deles era que acreditava nunca conseguir acompanhar o ritmo. Sempre que eu parecia entender álgebra, passávamos para um novo tópico ainda mais difícil que o último.

Estudar álgebra é como lutar com o Mike Tyson. Mas nesse caso se trata de um campeão do raciocínio matemático que permaneceu incontestado por centenas de anos, e você se vê enfrentando-o no ringue. Você nunca consegue dar um soco em resposta porque está ocupado demais se defendendo das investidas do seu oponente. Quando o sino toca, indicando o final da luta, você só consegue pensar "Eu sobrevivi" e esperar que alguém o carregue para fora do ringue.

Talvez você não tenha odiado álgebra tanto quanto eu. Você pode ser um daqueles sortudos que entendem o assunto facilmente – aliás, muito sortudo. Mas, para o resto de nós, ainda resta uma esperança. Álgebra é bem mais fácil depois que já passou do que quando você está tomando a primeira surra dela. Como cálculo é uma grande extensão da álgebra, com certeza você vai precisar de um repertório maior sobre o assunto. Então, é hora de colocar aquelas velhas luvas de boxe de volta e enfrentar alguns *rounds* com a sua velha parceira de briga. A boa notícia é que você com certeza está mais forte desde a última rodada. Porém, se você acredita que uma breve revisão de álgebra não será o bastante para você, dê uma espiada no livro anterior a este que eu mesmo escrevi: *O Guia Completo para Quem Não É C.D.F. – Álgebra*.

Andando na Linha: Equações Lineares

Os gráficos têm papel importante no cálculo, e o mais simples deles – a linha – surpreendentemente aparece o tempo todo. Assim, é importante que você seja capaz de reconhecer, escrever e analisar gráficos e equações lineares. Para começar, lembre-se que uma equação linear sempre tem três componentes: duas variáveis e uma constante (numérica). Um dos jeitos mais comuns de escrever uma equação é a forma vértice.

Formas Comuns de Equações Lineares

Uma linha em forma vértice se parece com isso: $Ax + By = C$. Em outras palavras, as variáveis estão do lado esquerdo e o número ao lado direito do sinal de igual. Para estar oficialmente na forma vértice, os coeficientes (A, B e C) devem ser *números inteiros relativos*, e A deve ser positivo. Qual o propósito da forma vértice? Uma equação linear pode ter muitas formas diferentes (por exemplo, $x + y = 2$ é o mesmo que $x = 2 - y$). Porém, estando na forma vértice, todas as linhas com o mesmo gráfico têm exatamente a mesma equação. Então, a forma vértice é conveniente para os instrutores; eles sempre pedirão que as respostas sejam colocadas nessa forma para evitar respostas corretas alternativas.

de•fi•ni•ção

Um **número inteiro relativo** é um número sem uma parte decimal ou fracionária. Por exemplo, 3 e –6 são números inteiros relativos, enquanto 10,3 e $-\frac{1}{2}$ não são.

Você Tem Problemas

Problema 1: Coloque a equação linear a seguir na forma vértice.

$$3x - 4y - 1 = 9x + 5y - 12$$

Há duas formas principais para criar a equação de uma linha. Uma delas requer que você tenha a inclinação e a intersecção da linha com o eixo y. Chama-se, apropriadamente, forma inclinação-intersecção: $y = mx + b$. Nessa equação, m representa a inclinação e b a intersecção com o eixo y. Note a principal

característica de uma equação em forma inclinação-intersecção: encontra-se o *y*. Em outras palavras, *y* fica sozinho do lado esquerdo da equação.

Exemplo 1: Escreva uma equação linear com inclinação -3 e intersecção com o eixo *y* em 5.

Solução: Na forma inclinação-intersecção, $m = -3$ e $b = 5$, então substitua os valores na fórmula inclinação-intersecção:

$$y = mx + b$$
$$y = -3x + 5$$

Um outro jeito de criar uma equação linear requer menos informação – apenas um ponto e a inclinação (e o ponto não precisa ser ponto de intersecção com y). Seu nome é, graças à vasta criatividade dos matemáticos, forma ponto-inclinação. Dado o ponto (x_1, y_1) e ângulo "*m*", a equação da linha resultante será $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Você vai achar essa forma extremamente conveniente em nossas próximas aventuras com cálculo, então veja se entendeu bem. Não se confunda com *x* e x_1 ou *y* e y_1. As variáveis com o número subscrito representam coordenadas do ponto que lhe foi dado. Não substitua o outro *x* e o *y* por nada: tais variáveis são mantidas em sua resposta final. Veja como é fácil.

Exemplo 2: Se uma linha *g* contém o ponto (-5, 2) e tem uma inclinação $-\frac{1}{5}$, qual é a equação de *g* na forma vértice?

Solução: Já que você tem uma inclinação e um ponto (que não é o ponto de intersecção com o eixo *y*), você deve usar a forma ponto-inclinação para montar a equação da linha. Assim, $m = -\frac{1}{5}$, $x1 = -5$ e $y_1 = 2$. Coloque esses valores na forma ponto-inclinação e obtenha:

$$y - 2 = -\frac{1}{5}\left(x - \left(-5\right)\right)$$
$$y - 2 = -\frac{1}{5}\left(x + 5\right)$$

Se essa equação deve estar em forma vértice, não pode ter frações. Lembre-se que os coeficientes devem ser números inteiros relativos, então, para se livrar das frações, multiplique toda a equação por 5.

$$5y - 10 = -\left(x + 5\right)$$
$$5y - 10 = -x - 5$$

Agora, passe as variáveis para a esquerda e as constantes para a direita, assegurando-se de que *x* seja positivo; isso coloca tudo na forma vértice:

$$x + 5y = 5$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre a equação da linha que passa através do ponto (0, -2) com inclinação $\frac{2}{3}$ e coloque na forma vértice.

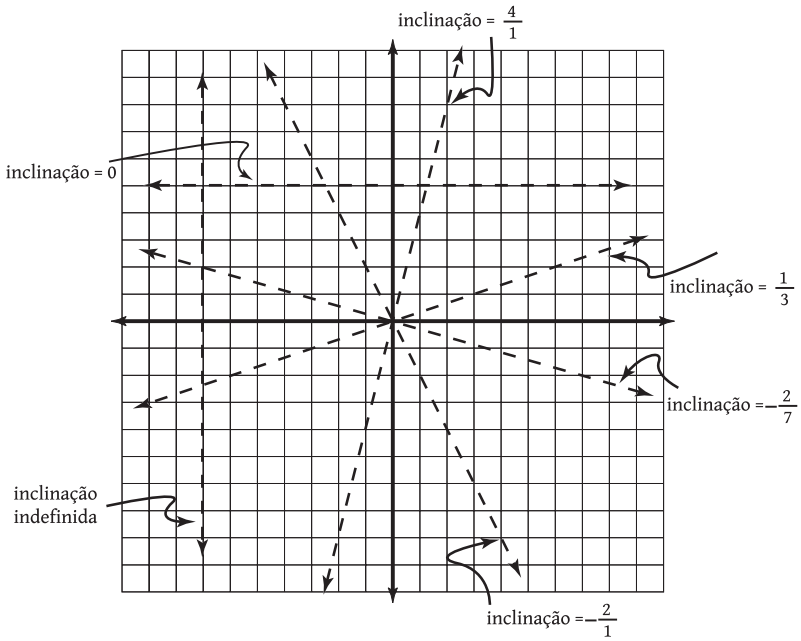
Calculando a Inclinação

Você deve ter notado que ambas as formas de criar linhas exigem conhecimento da sua inclinação, e é uma informação bem importante (quase tão importante quanto usar sapatos e camisa se quiser sair para comprar uma raspadinha). A *inclinação* de uma linha é um número que descreve precisamente o quanto ela é inclinada – quanto maior o seu valor, mais íngreme é a linha. Além disso, o sinal da inclinação lhe dirá se a linha sobe ou desce ao longo de sua extensão.

Como podemos ver na Figura 2.1, linhas com inclinações rasas têm ângulos menores. Se a linha sobe (da esquerda para a direita), a inclinação é positiva; se ela, no entanto, desce da esquerda para a direita, a inclinação é negativa. Linhas horizontais têm inclinação 0 (nem positiva nem negativa), e a inclinação de linhas verticais é considerada indefinida ou nula.

Figura 2.1

Calculando a inclinação de uma linha.



É muito fácil calcular a inclinação de qualquer linha: encontre dois pontos quaisquer na linha (a, b) e (c, d) e os substitua nesta fórmula:

$$\text{inclinação} = \frac{d - b}{c - a}$$

Basicamente, você está encontrando a diferença nos *y* e dividindo pela diferença nos *x*. Se o numerador for maior, os *y* mudam rapidamente e a linha se torna íngreme. Por outro lado, se o denominador for maior, a linha se move mais rapidamente para a esquerda ou para a direita do que para cima e para baixo, o que nos dá uma inclinação rasa.

Você Tem Problemas

Problema 3: Encontre a inclinação da linha contendo os pontos (3, 7) e (-1, 4).

Você também deve se lembrar que linhas paralelas têm inclinações iguais, enquanto as perpendiculares têm inclinações negativas inversas. Assim, se a linha *g* tiver inclinação $\frac{5}{7}$, a linha paralela *h* também teria inclinação $\frac{5}{7}$; uma linha perpendicular *k* teria inclinação $-\frac{7}{5}$. Usaremos essa informação no próximo exemplo.

Exemplo 3: Encontre a equação da linha *j*, sendo que ela é paralela à linha $2x - y = 6$ e contém o ponto (–1, 1); escreva a equação da linha *j* na forma inclinação-intersecção.

Solução: Este problema exige que você crie a equação de uma linha, e você vai descobrir que a melhor maneira de fazer isso é a forma ponto-inclinação. Então, você precisa de um ponto e do grau de inclinação – e você já tem o ponto: (-1, 1). Usando o seu sentido aguçado de dedução, você sabe que apenas a inclinação precisa ser encontrada. Mas como encontrá-la? Se *j* é *paralela* a $2x - y = 6$, as linhas precisam ter o mesmo grau de inclinação; então, qual é a inclinação de $2x - y = 6$? Aqui está a solução: se você resolver por *y*, será na forma inclinação-intersecção, e a inclinação "m" será o coeficiente de *x*. Dessa forma, você obtém $y = 2x - 6$. Portanto, a inclinação de ambas as linhas é 2, e você pode usar a forma ponto-inclinação para escrever a equação de *j*:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 2(x - (-1)) \\ y - 1 &= 2(x + 1) \end{aligned}$$

Encontre *y* para colocar a equação na forma inclinação-intersecção:

$$y = 2x + 3$$

Você Tem o Poder: Regras Exponenciais

Eu acho que as exponenciais são a perdição dos alunos de cálculo. Mesmo que eles nunca tenham aprendido bem o assunto ou simplesmente cometam erros desatentos, os erros de exponenciais são frustrantes. Portanto, vale a pena dedicar alguns minutos e se atualizar sobre as regras exponenciais mais importantes.

Você pode achar esse exercício "poderoso". Se achar, ligue para a Oprah Winfrey e conte a ela, pois isso pode me render um convite para o programa dela.

- Regra 1: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Explicação: Se você multiplicar dois termos de mesma base (nesse caso *x*), adicione as potências e mantenha a base. Por exemplo, $a^2 \cdot a^7 = a^9$.

- Regra 2: $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Explicação: Esta regra é o oposto da primeira. Se você dividir (em vez de multiplicar) dois termos de mesma base, você subtrai (e não soma) as potências e mantém a base. Por exemplo, $\frac{w^7}{w^3} = w^4$.

- Regra 3: $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

Explicação: Um expoente negativo indica que a variável está no ponto errado; na verdade, seu lugar é na parte oposta da fração, mas ela apenas afeta a variável com a qual está em contato.

Ponto Crítico

Elimine expoentes negativos de suas respostas. A maioria dos instrutores considera as respostas com expoentes negativos não-simplificadas. Eles provavelmente também consideram que os copos estão meio vazios, nunca meio cheios. Pense nisso. Quantos professores de matemática alegres você conhece?

Por exemplo, na expressão $\frac{x^3y^{-2}}{3}$, apenas *y* é elevado a uma potência negativa, então precisa ficar na parte oposta da fração. Depois de simplificada corretamente, a fração ficará assim: $\frac{x^3}{3y^2}$. Note que o expoente fica positivo quando é movido para o lugar certo. Lembre-se que um expoente deve estar feliz (positivo) em uma fração.

- Regra 4: $(x^a)^b = x^{ab}$

Explicação: Se uma expressão exponencial for elevada a uma potência, você deve multiplicar os expoentes e manter a base. Por exemplo, $(h^7)^3 = h^{21}$.

- Regra 5: $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$ and $\left(\sqrt[b]{x}\right)^a$

Explicação: O numerador da potência fracionária fica como expoente. O denominador da potência lhe diz o tipo de radical (raiz quadrada, raiz cúbica, etc.). Por exemplo, $4^{3/2}$ pode ser simplificado tanto como $\sqrt{4^3}$ ou $\left(\sqrt{4}\right)^3$. De qualquer jeito, a resposta é 8.

Exemplo 4: Simplifique $xy^{1/3}(x^2y)^3$.

Solução: Seus primeiros passos deveriam ser elevar (x^2y) à terceira potência. Você precisa usar a regra 4 duas vezes (subentende-se que o expoente atual de y seja 1 quando não está escrito). Isso nos dá $x^{2\cdot3}y^{1\cdot3} = x^6y^3$. O problema agora fica assim: $xy^{1/3}\left(x^6y^3\right)$.

Para terminar, você precisa multiplicar os valores de x e y, usando a regra 1: Isso nos dá. O problema agora fica assim:.

$$x \cdot x^6 \cdot y^{1/3} \cdot y^3$$
$$x^{1+6}y^{\frac{1}{3}+3}$$
$$x^7y^{10/3}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Simplifique a expressão $(3x^{-3}y^2)^2$ usando regras exponenciais.

A Separação É Difícil: Fatoração de Polinômios

Fatoração é uma daquelas coisas que você vê diversas vezes em álgebra. Descobri que até entre os meus alunos que não gostavam de matemática, a fatoração era popular... é algo que as pessoas simplesmente entendem, ainda que todo o resto lhes tenha escapado. No entanto, não é assim que funciona na maioria das escolas europeias, o que surpreendeu a mim e a meus colegas enquanto eu lecionava para o ensino médio.

Alunos de intercâmbio canadenses me olhavam sem entender nada quando eu discutia fatoração em sala de aula. Isso não quer dizer que eles não eram extremamente inteligentes (porque eram!); eles apenas usavam outros métodos. No entanto, a fatoração é realmente muito útil para cálculo, então julguei que fosse importante o bastante para arranjar-lhe um espaço aqui. Chame isso de patriotismo.

de•fi•ni•ção

Fatorar é "desmultiplicar", decompor um número ou expressão em partes menores que, se multiplicadas, retornam ao valor original.

Cálculo não exige que você fatore coisas complicadas, então vamos nos ater ao básico aqui. *Fatoração* é basicamente o inverso da multiplicação – ou seja, o processo de multiplicação é desfeito para se descobrir por onde se começou. Por exemplo, você pode decompor o número 6 em fatores de 3 e 2, já que $3 \cdot 2 = 6$. E pode haver mais de uma forma correta de fatorar algo.

Máximo Divisor Comum

Fatorar usando o máximo divisor comum é o método mais fácil e é usado para termos com partes comuns. É bem mais fácil do que parece. Tome por exemplo a expressão $4x + 8$.

Note que ambos os termos podem ser divididos por 4, o que torna 4 um fator comum. Assim, você pode escrever a expressão na forma fatorada $4(x + 2)$.

Ou seja, extraí o fator comum 4, e o que restou foram os termos, já que 4 é divisor de cada um deles. Nesse tipo de problema, você tem de se perguntar "O que os termos têm em comum?" e então extrair o máximo divisor comum de cada um deles para dar a resposta fatorada.

Você Tem Problemas

Problema 5: Fatore a expressão $7x^2y - 21xy^3$.

Modelos Especiais de Fatoração

Você deve se sentir confortável para fatorar trinômios como $x^2 + 5x + 4$ usando o método que mais lhe agrada. A maioria das pessoas joga com pares binomiais até tropeçar em algo que funcione, nesse caso $(x + 4)(x + 1)$, enquanto outros usam meios mais complicados. Apesar de seu "talento" pessoal, há alguns padrões que devem ser memorizados:

- Diferença de quadrados perfeitos: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Explicação: Um quadrado perfeito é um número como o 16, que pode ser obtido multiplicando-se algo por ele próprio. No caso do 16, esse algo é o número 4, já que 4 vezes ele mesmo é 16. Se você vir um quadrado perfeito sendo subtraído por outro, você pode fatorá-lo automaticamente usando esse padrão. Por exemplo, $x^2 - 25$ é uma diferença de x^2 e 25, e ambos são quadrados perfeitos. Por isso, pode ser fatorado como $(x + 5)(x - 5)$.

- Soma de cubos perfeitos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Alerta do Kelley

Não se pode fatorar a soma de quadrados perfeitos, então, enquanto $x^2 - 4$ é fatorável, $x^2 + 4$ não é.

Explicação: Cubos perfeitos são similares a quadrados perfeitos. O número 125 é um cubo perfeito porque $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Esse padrão é um pouco mais difícil de memorizar, mas pode às vezes ser útil. Essa fórmula pode ser apenas levemente modificada para fatorar a *diferença*

de cubos perfeitos, como ilustrado a seguir. O processo é o mesmo, a não ser por uma mudança de sinais.

- Diferença de cubos perfeitos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Explicação: Chega de símbolos e fórmulas; vamos partir para um exemplo.

Exemplo 5: Fatore $x^3 - 27$ usando o padrão de fatoração de diferença de cubos perfeitos.

Solução: Note que x é um cubo perfeito, já que $x \cdot x \cdot x = x^3$, assim como 27, já que $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Assim, $x^3 - 27$ corresponde a $a^3 - b^3$ na fórmula, com $a = x$ e $b = 3$. Agora, basta colocar a e b na fórmula:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

Não dá para fatorar $(x^2 + 3x + 9)$ mais do que isso, então terminamos.

Você Tem Problemas

Problema 6: Fatore a expressão $8x^3 + 343$.

Resolvendo Equações Quadráticas

Antes de você olhar para álgebra pelo retrovisor, há mais uma parada. É claro que você sempre conseguiu resolver equações como $x + 9 = 12$, mas quando as equações se tornam mais traiçoeiras, você pode entrar em pânico. Esquecer como se resolvem equações quadráticas (cujo maior expoente é 2) tem sintomas claros: vertigem, dificuldade para respirar, náuseas e perda de apetite. Para lutar contra essa doença, tome uma colher de sopa de cada um dos métodos para resolver equações quadráticas listados a seguir, e me ligue pela manhã.

Todas as equações quadráticas podem ser resolvidas com a *fórmula quadrática* (terceiro método, a seguir), mas é importante que você conheça os outros dois métodos também. Fatorar é, sem dúvida, o método mais rápido, então é melhor tentar usá-lo primeiro. Poucas pessoas escolhem completar os quadrados como primeira opção, mas sempre funciona (assim como a fórmula quadrática), ainda que possua alguns passos a mais. Porém, você *precisa* aprender a completar o quadrado, pois ele aparece mais adiante nos estudos de cálculo, quando você menos espera.

Primeiro Método: Fatoração

Para começar, iguale a sua equação quadrática a 0; isso quer dizer "adicione e subtraia os termos conforme for preciso para que fiquem todos de um lado da equação. Se a

equação resultante for fatorável, fatore-a e iguale cada termo individual a 0. Essas equações menores vão lhe mostrar o resultado da equação maior. E isso é tudo.

Exemplo 6: Resolva a equação $3x^2 + 4x = -1$ por fatoração.

Solução: Comece sempre o método da fatoração igualando a equação a 0. Nesse caso, comece somando 1 de cada lado da equação: $3x^2 + 4x + 1 = 0$.

Agora, fatore a equação e iguale cada fator a 0. Isso nos fornece duas "equaçõezinhas" que precisam ser resolvidas para que você chegue à resposta final.

$$(3x + 1)(x + 1) = 0$$
$$3x + 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -1$$

Essa equação tem duas soluções: $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -1$. Você pode conferir substituindo cada uma delas separadamente na equação original, e então descobrirá que o resultado é verdadeiro.

Segundo Método: Completando o Quadrado

Como eu disse antes, este método é um pouco mais difícil do que os outros dois, mas você precisa aprendê-lo agora, ou terá de voltar para descobrir depois. Aprendi que é melhor entender este método no contexto de um exemplo, então vamos lá.

Exemplo 7: Resolva a equação $2x^2 + 12x - 18 = 0$, completando o quadrado.

Solução: Neste método, diferente da fatoração, você precisa separar a constante das variáveis, então mova a mesma para o lado direito da equação adicionando 18 a ambos os lados:

$$2x^2 + 12x = 18$$

Alerta do Kelley

Se você não colocar 1 como o coeficiente do termo x^2, o restante do processo de completar o quadrado não vai dar certo. Da mesma forma, quando você usa a divisão para eliminar o coeficiente x^2, assegure-se de fazer isso com todos os termos da equação (inclusive a constante, fixando-a no outro lado da equação).

Isso é importante: para que dê certo, o coeficiente de x^2 *deve* ser 1. Nesse caso, é 2, então, para eliminar esse coeficiente desagradável, divida cada termo da equação por 2:

$$x^2 + 6x = 9$$

Esta é a solução para completar o quadrado: pegue metade do coeficiente de x, eleve ao quadrado, e o some a ambos os lados da equação. Nesse problema, o coeficiente x é 6,

então pegue a sua metade (3) e eleve ao quadrado (32 = 9). Some o resultado (9) a ambos os lados da equação.

$$x^2 + 6x + \mathbf{9} = 9 + \mathbf{9}$$
$$x^2 + 6x + 9 = 18$$

Neste ponto, se você fez tudo certo, o lado esquerdo da equação poderá ser fatorado. Aliás, será um quadrado perfeito!

$$(x+3)(x+3) = 18$$
$$(x+3)^2 = 18$$

Para resolver a equação, tire a raiz quadrada de ambos os lados. Isso vai cancelar o expoente. Sempre que fizer isso, terá de colocar um sinal de ± no início do lado direito da equação. Isso sempre é feito quando se tira a raiz quadrada dos lados de qualquer equação:

$$\sqrt{(x+3)^2} = \pm\sqrt{18}$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{18}$$

Para encontrar *x*, subtraia 3 de cada lado da equação e pronto. Simplificar $\sqrt{18}$ em $3\sqrt{2}$ também é um bom caminho:

$$x = -3 \pm 3\sqrt{2}$$

Terceiro Método: A Fórmula Quadrática

A fórmula quadrática é um método coringa para todas as necessidades de uma equação quadrática. Tudo o que você tem de fazer é igualar a equação a 0, e já será meio caminho andado. Sua equação vai ficar assim: $ax^2 + bx + c = 0$, onde *a*, *b* e *c* são coeficientes, conforme indicado. Pegue esses números e coloque-os diretamente nesta fórmula (que, definitivamente, você deve memorizar):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Você chegará à mesma resposta que teria se completasse o quadrado. Só para convencer você de que a resposta é a mesma, vamos resolver o Exemplo 7 novamente, mas desta vez com a fórmula quadrática.

Exemplo 8: Resolva a equação $2x^2 + 12x - 18 = 0$, utilizando agora a fórmula quadrática.

Solução: Como a equação já está igualada a 0, sua forma é $ax^2 + bx + c = 0$, e $a = 2$, $b = 12$ e $c = -18$. Coloque esses valores na fórmula quadrática e simplifique:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(2)(-18)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - (-144)}}{4}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{288}}{4}$$

$$x = \frac{-12 \pm 12\sqrt{2}}{4}$$

$$x = \frac{-12}{4} \pm \frac{12\sqrt{2}}{4}$$

$$x = -3 \pm 3\sqrt{2}$$

Por isso, embora a fórmula quadrática tenha menos etapas, ela dá margem a erros. Pratique os dois métodos, mas use em primeiro lugar aquele com o qual se sente mais confortável.

Você Tem Problemas

Problema 7: Resolva a equação $3x^2 + 12x = 0$ três vezes, usando todos os métodos que você aprendeu para equações quadráticas.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Resolver equações básicas é uma habilidade importante em cálculo.
- Revisar as cinco regras exponenciais evitará erros no final das contas.
- Você pode criar a equação de uma linha com poucas informações, usando a forma ponto-inclinação.
- Existem três maneiras conhecidas para resolver equações quadráticas, cada uma importante para diferentes fins.

Capítulo 3

Equações, Relações e Funções – Essa Não!

Neste Capítulo

- Quando uma equação é uma função?
- Importantes propriedades da função
- Construindo seu repertório de habilidades com funções
- O básico das equações paramétricas

Eu ainda me lembro de um dia fatídico na aula de Álgebra I, quando a equação $y = 3x + 2$ se transformou em $f(x) = 3x + 2$. A temida função! À época, não entendi bem por que tínhamos de fazer a troca. Eu gostava do y, e fiquei triste de vê-lo ir embora. O que não conseguia entender era que o advento da função havia marcado um novo passo adiante em minha carreira na matemática.

Se você sabe que uma equação é também uma função, isso garante que a equação em questão sempre se comportará de maneira específica. A maioria das definições em cálculo precisa de funções para que funcionem corretamente. Portanto, grande parte do nosso trabalho em cálculo será exclusivamente com funções, com exceção das equações paramétricas. Por isso, é bom saber exatamente o que é uma função, reconhecer de imediato funções importantes e saber realizar suas operações básicas.

Como Se Comporta uma Função?

Vamos falar de vocabulário antes de continuarmos. Qualquer equação matemática é classificada como uma *relação*, já que a equação descreve uma forma específica de relacionamento entre as variáveis e números na equação. Relações não precisam ser equações, embora esta seja a forma mais comum em que são escritas.

definição

Uma **relação** é uma coleção de números relacionados. A relação entre os números é frequentemente descrita por uma equação, embora pudesse ser demonstrada simplesmente em uma lista de pares ordenados. Uma **função** é uma relação caracterizada pelo fato de um argumento ter somente uma imagem de ***x*** correspondente. Qualquer argumento de uma função é parte do **domínio** da mesma, e qualquer imagem de ***x*** possível para a função é parte do seu **contradomínio**.

Essa é a definição mais básica de uma relação. Você vai perceber que não é tão complicado, é apenas uma lista de pares ordenados:

$$s:\{(-1,5),(1,6),(2,4)\}$$

Essa relação, chamada de *s*, traz uma lista de argumentos e imagens de *x*. Essencialmente, você está perguntando ao *s:* "O que você vai me dar se eu lhe der -1?" A resposta é 5, já que o par ordenado (-1,5) aparece na relação. Se você inserir 2, *s* devolve 4. Entretanto, se você inserir 6, *s* não tem resposta; os únicos argumentos que *s* aceita são -1, 1 e 2, e as imagens de *x* que pode oferecer são 5, 6 e 4.

Em cálculo, é mais útil escrever relações assim:

$$g(x) = \frac{1}{3}x - 3$$

Essa relação, chamada de *g*, aceita qualquer número real como argumento. Para descobrir a imagem de *x* dada por *g*, coloque o argumento no lugar de *x*. Por exemplo, se o argumento $x = 21$, a imagem de *x* – chamada $g(21)$ – é a seguinte:

$$g(21) = \frac{1}{3}(21) - 3$$
$$g(21) = 7 - 3 = 4$$

Uma *função* é um tipo específico de relação. Em uma função, um argumento só pode gerar uma imagem de *x*. Quando um número entra, somente um número relacionado pode sair. A relação *g* demonstrada acima é uma função de *x*, porque para cada *x* inserido pode-se obter somente um resultado. Se você definir $x = 3$, o resultado será sempre -2. Se você fizesse isso 50 vezes, não teria de repente o resultado 101,7 como resposta na quadragésima nona tentativa! Cada argumento resulta em somente uma imagem de *x* correspondente. Argumentos diferentes resultam em imagens de *x* diferentes, por exemplo, $g(3) \neq g(6)$. Nesse caso, tudo bem. Você só não pode ter respostas diferentes ao inserir a mesma quantidade inicial.

A palavra *domínio* normalmente é usada para descrever o conjunto de argumentos para uma função. Qualquer número aceito por uma função como argumento apropriado é parte do domínio. Por exemplo, na função s:{(–1,5),(1,6),(2,4)}, o domínio é {-1, 1, 2}. O conjunto de imagens de x para uma função é chamado de *contradomínio*. O contradomínio de s é {4, 5, 6}.

Chega de matemática um minuto – vamos relacionar isso tudo à vida real. A altura de uma pessoa é uma função do tempo. Se eu perguntar: "Qual era sua altura exata ao meio-dia de hoje?", você poderia dar somente uma resposta. Seria impossível dizer: "1 metro e meio" *e* "1 metro e 80 centímetros", a não ser que você tenha mentido na sua carteira de motorista.

Ponto Crítico

Uma função não precisa ter um nome, como $f(x)$ ou $h(x)$, para ser uma função. As relações $y = x^2$ e $f(x) = x^2$ são igualmente qualificadas como funções, apesar de parecerem diferentes. A relação $r(x) = x \pm 2$ não é uma função de x. Cada argumento resulta em duas imagens de x. Por exemplo, $r(1) = 3$ e -1.

Às vezes, você pode inserir mais de um número em uma função – você pode também inserir uma *função* dentro de outra função. Isso se chama composição de funções, e não é difícil de fazer. Simplesmente comece com a avaliação interna da função e desenvolva o caminho para fora dela.

Exemplo 1: Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 6$, avalie $g(f(25))$.

Solução: Nesse caso, 25 foi inserido em f, e essa imagem de x, por sua vez, foi inserida em g. Comece no interior e encontre $f(25)$. Essa é fácil: $f(25) = \sqrt{25} = 5$. Agora, insira o resultado em g:

$$g(5) = 5 + 6 = 11$$

Portanto, $g(f(25)) = 11$.

Você Tem Problemas

Problema 1: Se $f(x) = f(x) = \frac{x-1}{6}$, $g(x) = x^2 + 15$, e $h(x) = \sqrt[3]{x}$, encontre $h(g(f(43)))$.

Às vezes, em cálculo, você se depara com uma figura estranha: a função definida em trechos. Essa função é parecida com o monstro Frankenstein, porque é construída pela união de outras funções. Dê uma olhada nessa bagunça:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 2 \\ x - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

definição

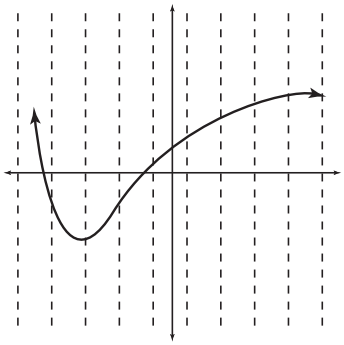
O **teste da linha vertical** diz a você se um gráfico é ou não o gráfico de uma função. Se qualquer linha vertical desenhada intercepta o gráfico mais de uma vez, então esse gráfico não é uma função.

Não fique confuso – não é tão difícil de entender. Basicamente, se você quiser inserir um número menor que 2 em f, você deve inseri-lo em $2x + 3$. Por exemplo, $f(1) = 2(1) + 3 = 5$. Porém, se seu argumento for maior ou igual a 2, deve ser inserido em $x - 4$ para chegar à imagem de x. Por exemplo, $f(10) = 10 - 4 = 6$. As pessoas normalmente se confundem quanto a tais restrições ($x < 2$ e $x \geq 2$). Lembre-se de que essas restrições existem para o argumento (x), não para a imagem de x, e você se sairá bem.

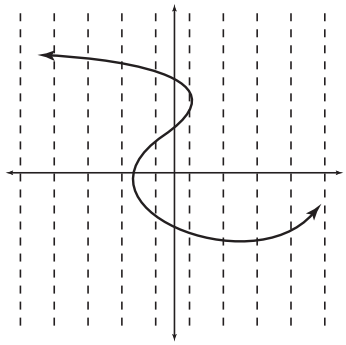
A última característica importante que você deve saber sobre funções é o *teste da linha vertical*. Esse teste é uma maneira de dizer se um gráfico corresponde a uma função ou não. Tudo que você precisa fazer é desenhar linhas imaginárias verticais através do gráfico e checar o número de vezes que as linhas atingem o gráfico (veja a Figura 3.1). Se qualquer uma das linhas imaginárias desenhadas no gráfico atingi-lo mais de uma vez, o mesmo não pode ser uma função.

Figura 3.1

Nenhuma linha vertical cruza o gráfico à esquerda mais de uma vez, então, é uma função. Porém, algumas linhas verticais atingem o gráfico à direita mais de uma vez, por isso, não pode ser uma função.



Função: passa no teste da linha vertical



Não função: não passa no teste da linha vertical

Simetria Funcional

Agora que você já sabe tudo isso sobre funções, também deve conhecer algumas de suas principais classificações e jargões. Se você disser essas palavras enquanto conversa com amigos em uma festa, certamente vai surpreendê-los. Imagine como eles ficariam impressionados com um comentário casual como "essa pintura realmente explora a simetria y para nos mostrar nosso minúsculo lugar no mundo". Bem, talvez você e eu não frequentemos o mesmo tipo de festa...

definição

Uma **função simétrica** parece com uma imagem espelhada dela mesma, tipicamente pelo eixo x, eixo y ou pela origem.

Uma função tem *simetria* quando se espelha em relação a um ponto fixo do plano cartesiano. Pode parecer um conceito complicado, mas não é. Considere, por exemplo, o gráfico de $y = x^2$.

Note que o gráfico é exatamente igual em qualquer lado do eixo *y*. Essa função é considerada simétrica em relação ao eixo *y*. Existe aritmética simples para a simetria de *y* que não requer o gráfico.

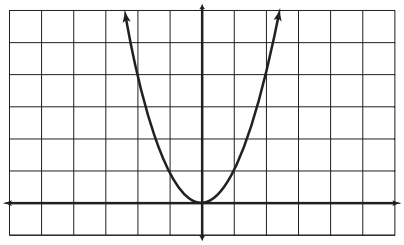


Figura 3.2

Mergulhe seus olhos em um gráfico simétrico pelo eixo *y*.

Exemplo 2: Determine se o gráfico $y = x^4 - 2x^2 + 1$ é simétrico pelo eixo *y*.

Solução: Substitua cada um dos *x* com (-*x*) e simplifique a equação:

$$y = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1$$
$$y = x^4 - 2x^2 + 1$$

Toda vez que um número negativo for elevado a uma potência par, o sinal negativo será eliminado. Perceba que nosso resultado simplificado é igual ao da equação original. Quando isso acontece, você sabe que a equação é, de fato, simétrica em relação ao eixo *y* (falando nisso, funções simétricas em relação ao eixo *y* são classificadas também como funções pares). Caso você queira uma prova visual, confira o gráfico na Figura 3.3:

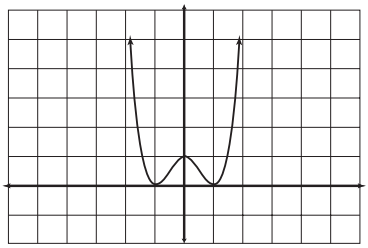


Figura 3.3

O gráfico de $y = x^4 - 2x^2 + 1$

Os outros dois importantes tipos de simetria são simetria *x* e simetria em relação à origem, ilustradas nos gráficos da Figura 3.4.

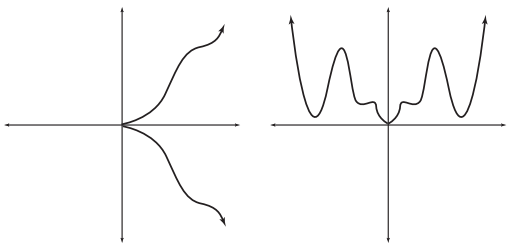


Figura 3.4

Outros dois tipos de simetria que podem ser encontrados. Perceba que a maioria das equações com simetria *x* não são funções, porque não passam no teste da linha vertical.

Semelhante à simetria *y*, a simetria *x* requer que o gráfico seja idêntico acima e abaixo do eixo *x*. O teste para a simetria de *x* é também semelhante ao da simetria de *y*, com a diferença que você deve inserir (*-y*) para o teste de *y* e (*-x*) para o de *x*. Novamente, se a equação voltar à forma original após ser simplificada, significa que é simétrica em relação ao eixo *x*. Se qualquer sinal for diferente, não pode ser considerada simétrica.

A simetria em relação à origem existe quando o gráfico faz exatamente o oposto em qualquer um dos lados da origem. Na Figura 3.4, perceba que a curva simétrica em relação à origem inclina-se para baixo e à direita conforme o *x* se torna mais positivo, e vai para cima e à esquerda conforme o *x* se torna mais negativo. Na verdade, cada volta do segundo quadrante combina-se e se inverte no quarto quadrante. Para testar se uma equação é simétrica em relação à origem, substitua todos os *x* por (*-x*) e todos os *y* por (*-y*). Mais uma vez, se a equação simplificada corresponder à original, então a função é simétrica em relação à origem. Inclusive, se a função for simétrica em relação à origem, você pode também classificá-la como função ímpar.

Você Tem Problemas

Problema 2: Determine – se houver – que tipo de simetria é evidente no gráfico de $y = \frac{x^3}{|x|}$.

Gráficos para Saber de Cor

Durante seu estudo de cálculo, você verá certos gráficos várias vezes. Por isso, é importante conhecê-los intuitivamente. Você já está familiarizado com essas funções, mas certifique-se de que conhece seus gráficos profundamente, e isso vai fazer com que economize tempo e frustrações em longo prazo. Diga para aquela pessoa especial em sua vida que ela não possuirá mais seu coração por inteiro – ela terá de dividi-lo com alguns gráficos matemáticos. Se ela não entender suas necessidades, então é porque não era para vocês dois ficarem juntos.

As descrições são as seguintes:

- $y = x$: a equação linear mais básica; tem inclinação 1 e ponto de intersecção com *y* 0; simétrica em relação à origem; tanto o domínio quanto o contradomínio são números reais.
- $y = x^2$: a mais básica equação de segundo grau; simétrica *y*; domínio composto por números reais; contradomínio é $y \geq 0$.
- $y = x^3$: a mais básica equação de terceiro grau; simetria em relação à origem; tanto o domínio quanto o contradomínio são números reais.
- $y = |x|$: o valor absoluto da função; retorna a forma positiva do argumento; simetria *y*; feita com dois segmentos de linha de inclinação -1 e 1,

respectivamente; domínio é composto de números reais, contradomínio é $y \geq 0$.

- $y = \sqrt{x}$: a função da raiz quadrada; não tem simetria; o domínio é $x \geq 0$ (é impossível encontrar a raiz quadrada de números menores que 0); o contradomínio é $y \geq 0$.
- $y = \frac{1}{x}$: não há intersecção em x ou em y; tanto o domínio quanto o contradomínio são números reais, à exceção do 0.

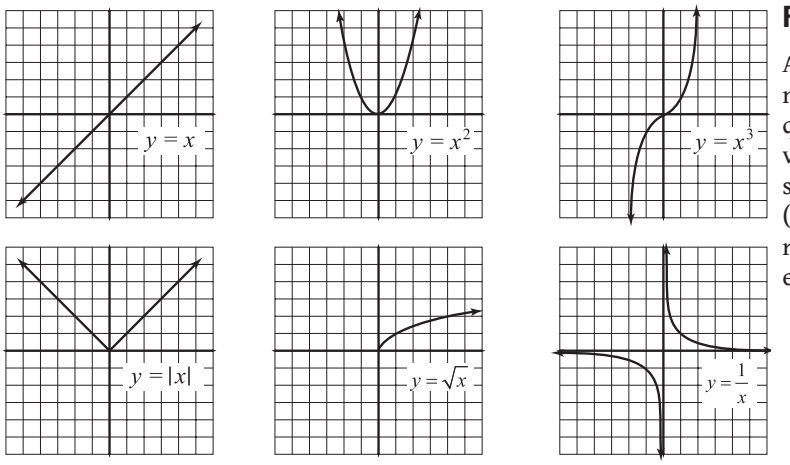


Figura 3.5

As seis funções mais básicas que, em breve, vão morar no seu coração (especificamente no ventrículo esquerdo).

Construindo uma Função Inversa

Você sempre usou funções inversas sem nem perceber. Elas são as ferramentas que você utiliza para eliminar algo indesejado em uma equação. Por exemplo, como você resolveria a equação $x^2 = 9$? Para resolver pelo x, você verificaria a raiz quadrada de ambos os lados para eliminar o número elevado ao quadrado. Isso funciona porque $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ são funções inversas.

Matematicamente falando, f e g são funções inversas se...

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

Em outras palavras, inserir g em f e f em g não deixa rastros da função (nem evidências do crime), somente x. Vamos voltar rapidamente ao $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ e demonstrar, matematicamente, que são funções inversas. Se inserirmos essas funções uma na outra, elas irão se cancelar, restando somente o x:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2} = x$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Verifique matematicamente que $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ e $y = \sqrt{2x+6}$ são funções inversas usando a composição de funções.

Funções inversas têm uma notação especial. O inverso de uma função $f(x)$ é escrito como $f^{-1}(x)$. Isso não significa "f elevado à primeira potência negativa". Lê-se "inverso de f". Sei que a notação é um pouco confusa, já que um expoente negativo normalmente significa que o pedaço indicado pertence a uma parte diferente da fração.

Agora, vamos às boas notícias. É muito fácil criar uma função inversa. A palavra "fácil" é normalmente muito enganosa quando usada por professores de matemática. De fato, sempre que qualificava uma discussão em classe como "Vamos, essa é fácil...", os alunos sabiam que seria tudo, menos isso. Porém, eu não mentiria para você, certo? Decida enquanto lê o próximo exemplo.

Exemplo 3: Se $g(x) = \sqrt{2x+5}$, encontre $g^{-1}(x)$.

Solução: Para começar, substitua a notação $g(x)$ da função por y:

$$y = \sqrt{2x+5}$$

Aqui, um passo importante: troque o x e o y. Isso é o que, essencialmente, uma função inversa faz: gira a função de dentro para fora para que o resultado tenha a interessante propriedade de cancelar a equação inicial:

$$x = \sqrt{2y+5}$$

Seu objetivo agora é resolver essa equação pelo y, e pronto! Neste problema, isso significa elevar ao quadrado os dois lados da equação:

$$x^2 = 2y + 5$$

Agora, subtraia 5 de ambos os lados e divida por 2 para solucionar pelo y:

$$x^2 - 5 = 2y$$

$$\frac{x^2 - 5}{2} = y$$

Essa é a função inversa. Para terminar, escreva com a notação apropriada:

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2 - 5}{2}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Encontre a função inversa de $h(x) = \frac{2}{3}x + 5$.

Equações Paramétricas

Com todo esse papo de funções, você talvez esteja desconfiado das não-funções. Não fique assim comigo. Você pode usar algo chamado de *equações paramétricas* para desenvolver gráficos também, e elas têm a capacidade especial de representar não-funções (como círculos) muito facilmente. Equações paramétricas são pares de equações, normalmente na forma de "x =" e "y =", que definem pontos do gráfico em termos de outra variável, geralmente t.

O que É um Parâmetro?

Essa definição é complicada, eu sei. Para entender melhor, vamos observar um exemplo:

$$x = t + 1$$

$$y = t - 2$$

de•fi•ni•ção

Equações paramétricas definem um gráfico em termos de uma terceira variável, ou parâmetro.

Essas duas equações juntas produzem um só gráfico. Para encontrar o gráfico, é preciso substituir alguns itens pelo parâmetro t; cada vez que você fizer uma substituição pelo t, fará um ponto no gráfico. Então, um parâmetro é somente uma variável na qual você insere valores numéricos para encontrar coordenadas em um gráfico de uma equação paramétrica. Por exemplo, se você inserir $t = 1$ nas equações, encontrará o seguinte:

$$x = t + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$y = t - 2 = 1 - 2 = -1$$

Assim, o ponto $(2, -1)$ está no gráfico. Para encontrar outro ponto, vou colocar $t = -2$, mas é possível inserir qualquer número real no lugar de t.

$$x = -2 + 1 = -1$$

$$y = -2 - 2 = -4$$

Um segundo ponto no gráfico é $(-1, -4)$. Você pode ver que esse processo é um pouco demorado. Na verdade, dá a impressão de que só um número infinito de valores de t vai gerar o gráfico exato.

Conversão para a Forma Retangular

Sejamos honestos. Ninguém quer inserir um número infinito de pontos. Mesmo se você tivesse tempo para fazer isso, com certeza poderia encontrar algo melhor para fazer. Assim, precisamos aprender a traduzir a forma paramétrica para

aquela que conhecemos e adoramos: a forma retangular. No próximo exemplo, traduziremos o conjunto de equações paramétricas para algo mais compreensível.

Exemplo 4: Traduza as equações paramétricas $x = t + 1$, $y = t - 2$ para a forma retangular.

Solução: Comece resolvendo uma das equações pelo *t*. Ambas são bem básicas, então é possível escolher qualquer uma das duas. Eu vou escolher a equação *x* para que meu resultado seja na forma de "*y* =". Isso facilita o gráfico:

$$x = t + 1$$

$$t = x - 1$$

Agora você tem o *t* em relação ao *x*. Assim, pode substituir o *t* na equação *y* com $(x - 1)$, já que você sabe que $t = x - 1$:

$$y = t - 2$$

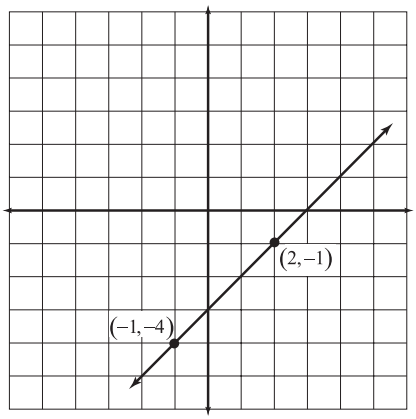
$$y = (x - 1) - 2$$

$$y = x - 3$$

Essa é somente uma linha em forma de inclinação-intersecção, então o gráfico das nossas equações paramétricas é a linha com inclinação 1 e intersecção com *y* -3; demonstração na Figura 3.6.

Figura 3.6

Gráfico de $y = x - 3$. Perceba que os pontos (2, –1) e (–1, –4) estão no gráfico, conforme suspeitamos no nosso trabalho anterior ao exercício 4.



Você Tem Problemas

Problema 5: Coloque as equações paramétricas $x = t + 1$, $y = t^2 - t + 1$ na forma retangular.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Uma relação se torna uma função quando cada um dos seus argumentos pode resultar em somente uma imagem de *x* correspondente.
- Os argumentos da função reúnem o domínio e as imagens de *x* formam o contradomínio.
- Quando uma função é inserida em sua função inversa (e vice-versa), elas se cancelam.
- Equações paramétricas são definidas por equações "*x* =" e "*y* =" que contêm um parâmetro, normalmente *t*.

Capítulo 4

Trigonometria: A Última Parada Antes do Cálculo

Neste Capítulo

- Características das funções periódicas
- As seis funções trigonométricas
- A importância do círculo unitário
- Fórmulas e identidades trigonométricas chave

A trigonometria, o estudo dos triângulos, está por aí há bastante tempo, movendo-se de forma misteriosa pelas sombras e assustando alunos desligados com suas "garras enormes" e acabando com suas carreiras matemáticas. Poucas coisas causam tanto pânico nas pessoas quanto a trigonometria.

Acredita-se que, antigamente, na véspera do Halloween, as crianças iam de porta em porta, com um saquinho nas mãos, dizendo: "Doce ou travessura!". Como resposta, os proprietários das casas as recompensavam com transferidores e compassos para evitar a ira dos pestinhas da vizinhança. Se todas as crianças fossem embora felizes, era um bom "senal" para a colheita. Porém, esse mito é definitivamente irreal, e eu saí pela tangente.

Tornando-se Repetitivo: Funções Periódicas

Existem seis grandes funções trigonométricas, e ao menos de três delas você já deve ter ouvido falar: seno, cosseno e tangente. Todas as funções trigonométricas (mesmo aquelas que se ofenderam porque você não ouviu falar delas) são funções periódicas. Uma *função periódica* tem a característica especial de se repetir após um período determinado de tempo. Pense no nascer do sol como uma função periódica. A cada 24 horas (um período fixo de tempo), ele aparece no horizonte.

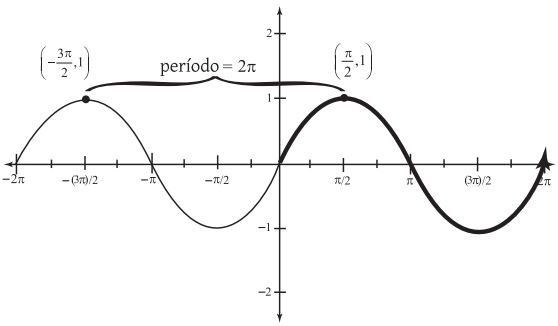
definição

Os valores de uma **função periódica** se repetem várias vezes, nos mesmos intervalos de tempo. O comprimento horizontal do intervalo após o qual a função se repete é chamado de **período**.

A quantidade necessária de espaço horizontal para que a função se repita é chamada de *período*. Para as funções trigonométricas mais básicas (seno e cosseno), o período é 2π. Observe o gráfico na Figura 4.1 de um período de $y = \text{sen } x$.

Figura 4.1

Um período de $y = \text{sen } x$.



O gráfico da função seno é uma onda, atingindo altura máxima de 1 e altura mínima de -1. Na parte do gráfico demonstrado acima, a altura máxima é atingida em $x = -\frac{3\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$. A distância entre esses dois pontos, onde o gráfico repete seu valor, é 2π. Se isso não ajudá-lo a entender o que significa o período, considere a parte mais escura do gráfico.

Essa parte começa na origem (0,0) e curva-se para cima e para baixo, retornando à altura 0 quando $x = 2\pi$. Na verdade, o gráfico atinge a altura 0, repetindo seu valor, quando $x = \pi$, mas ainda não completa seu período – que só termina em $x = 2\pi$.

definição

Ângulos coterminais têm o mesmo valor da função, pois o espaço entre eles é um múltiplo do período da função.

Se você pudesse estender o gráfico da função seno infinitamente para a direita ou para a esquerda, ele se redesenharia a cada 2π. Devido a essa propriedade das funções periódicas, você pode fazer uma lista infinita de argumentos com valores idênticos do seno. Estes são chamados de *ângulos coterminais*, e o próximo exemplo é sobre eles.

Exemplo 1: Liste dois ângulos adicionais (um positivo e um negativo) que tenham o mesmo valor de seno que $\frac{\pi}{4}$.

Solução: Sabemos que o seno se repete a cada 2π, então, exatamente a cada 2π para cima e para baixo no eixo x de $\frac{\pi}{4}$, o valor será o mesmo. Para encontrar esses valores, simplesmente some 2π a $\frac{\pi}{4}$ para encontrar um deles e subtraia 2π de $\frac{\pi}{4}$ para encontrar o outro. Para somar e subtrair os valores, será necessário ter os denominadores comuns:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$$

Ponto Crítico

A não ser que seja especificado de outra forma, considere que todos os ângulos deste livro são medidos em radianos.

Assim, os ângulos $\frac{9\pi}{4}$ e $-\frac{7\pi}{4}$ são coterminais a $\frac{\pi}{4}$ e $\text{sen}\,\frac{9\pi}{4} = \text{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$.

Introdução às Funções Trigonométricas

É hora de conhecer o elenco. Há seis personagens no drama que chamamos de trigonometria. Você verá um gráfico de cada um e aprenderá alguma coisa sobre a função. Embora não seja extremamente importante memorizar os gráficos dessas funções, é bom perceber como eles ilustram suas propriedades. Então, aqui estão eles, em ordem de importância, para ajudar sua jornada pelo cálculo:

Seno ($y = \text{sen}\ x$)

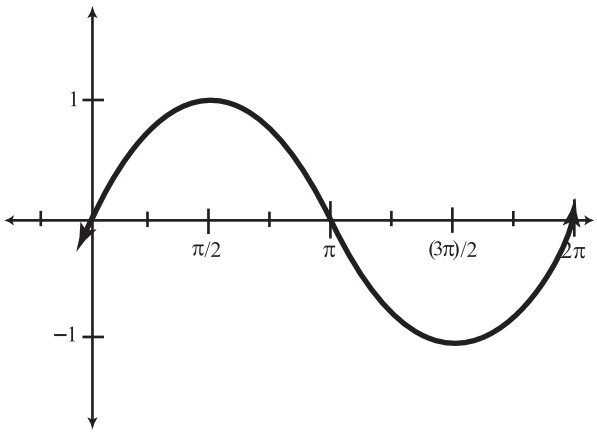
A função seno é definida por todos os números reais, e esse domínio irrestrito a torna confiável e versátil (veja a Figura 4.2). O contradomínio é $-1 \le y \le 1$, então, todos os valores do seno estão dentro desses limites. Perceba que a função seno tem o valor de 0 sempre que o argumento for um múltiplo de π. Às vezes, as pessoas se confundem ao memorizar valores do círculo unitário (mais sobre círculo unitário ainda neste capítulo). Se você pensar no gráfico do seno, pode facilmente se lembrar que $\text{sen}\ 0 = \text{sen}\ \pi = \text{sen}\ 2\pi = 0$, pois é aí que o gráfico cruza o eixo x. O período da função seno é 2π.

Cosseno ($y = \cos x$)

Cosseno é a "cofunção" de seno (veja a Figura 4.3). Em outras palavras, seus nomes são iguais, mas um deles tem o prefixo "co-", mas aposto que você já tinha percebido isso. Assim, eles são muito parecidos, possuem o mesmo domínio, contradomínio e período. Na verdade, se você alterar o gráfico $y = \cos x$ para um total de radianos à direita, terá o gráfico de $y = \text{sen}\ x$! O cosseno tem valor 0 em todas as "metades de π", como $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

Figura 4.2

y = sen *x*.



Ponto Crítico

Ao longo deste livro, vou avaliar e me referir a valores trigonométricos em termos de radianos, já que são muito mais usados do que os graus em cálculo. Tanto os graus quanto os radianos são meios alternativos de medir os ângulos, assim como Celsius e Fahrenheit são modos alternativos de medir a temperatura. Para se ter uma ideia da conversão, lembre-se que π radianos = 180 graus. Se quiser converter radianos para graus, multiplique por $\frac{180}{\pi}$. Por exemplo, $\frac{\pi}{2}$ é equivalente a $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = 90$. Para converter graus em radianos, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.

Tangente (*y* = tan *x*)

A tangente é definida com o quociente das duas funções anteriores: $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Então, para avaliar tan $\frac{\pi}{4}$, você avaliaria na verdade $\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}$ (que terá como resultado 1, para quem estiver curioso, mas haverá mais informações sobre isso mais adiante). Como o cosseno aparece como denominador, a tangente será indefinida toda vez que o cosseno for 0, o que (de acordo com a última seção) é a metade de π (veja a Figura 4.4). Perceba que o gráfico da tangente tem *assíntotas* verticais nesses valores. A tangente é igual a 0 a cada ponto médio entre as assíntotas. O domínio da tangente exclui as "metades de π" $\left\{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$, mas o contradomínio é composto de números reais. O período da tangente é π – note que há uma cópia completa de um período da tangente entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

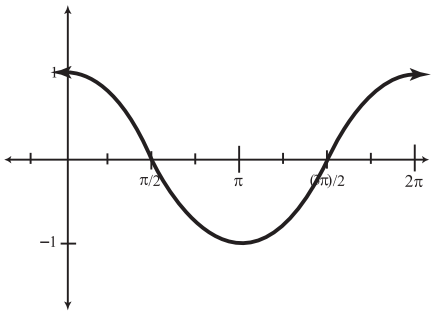


Figura 4.3

$y = \cos x$.

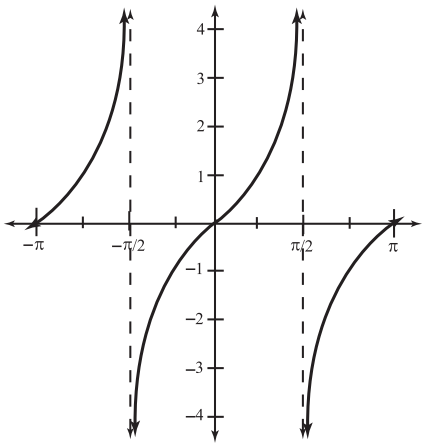


Figura 4.4

$y = \tan x$.

de•fi•ni•ção

Uma **assíntota** é uma linha que representa um valor inatingível que dá forma a um gráfico. Como o gráfico não pode atingir esse valor, ele se curva em direção à linha eternamente, esticando-se, tentando alcançar, mas sem sucesso. Uma assíntota vertical tipicamente indica a presença de 0 no denominador de uma fração. Por exemplo, a linha vertical $x = \frac{\pi}{2}$ é uma assíntota vertical de $y = \tan x$, pois a tangente tem 0 no denominador toda vez que $x = \frac{\pi}{2}$.

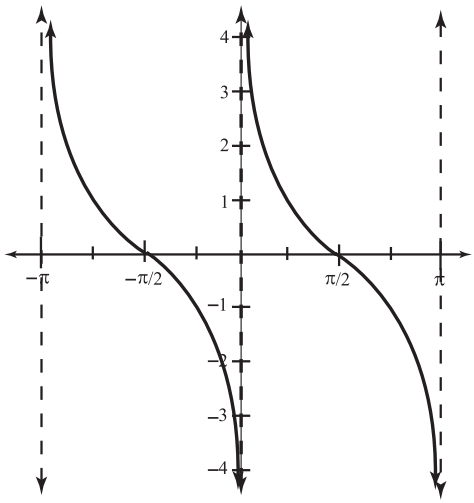
Cotangente ($y = \cot x$)

A cofunção da tangente, a cotangente, é a exata imagem da tangente, com algumas exceções (veja a Figura 4.5). Ela também é definida por um quociente: $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

Na verdade, a cotangente é, tecnicamente, a *recíproca* da tangente, então, você também pode escrever $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. Assim, essa função é indefinida toda vez que sen $x = 0$, o que acontece em todos os múltiplos de π: {..., −2π,−π,0,π,2π,...}, então, o domínio inclui todos os números reais, à exceção desse grupo. O contradomínio, como na tangente, é composto de números reais, e o período, π, também é igual ao da tangente.

Figura 4.5

y = cot *x*.



Secante (*y* = sec *x*)

A função secante é simplesmente a recíproca do cosseno, então, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

Assim, o gráfico da secante é indefinido (tem assíntotas verticais) nos mesmos lugares (e pelos mesmos motivos) que a tangente, já que ambos têm o mesmo denominador (veja a Figura 4.6). Assim, as duas funções também possuem o mesmo domínio. Perceba que a secante não possui intersecção com *x*. Na verdade, não chega nem perto do eixo *x*, chegando somente a 1 e − 1. Essa é uma comparação fascinante. O cosseno tem o contradomínio $-1 \le y \le 1$, mas a secante tem o contradomínio $y \le 1$ ou $y \ge 1$ – quase o oposto exato. Como a secante se baseia diretamente no cosseno, as funções têm o mesmo período, 2π.

definição

A **recíproca** de uma fração é a fração invertida (por exemplo, a recíproca de $\frac{7}{4}$ é $\frac{4}{7}$). A palavra "*refliprocal*" me ajuda a lembrar o que significa.

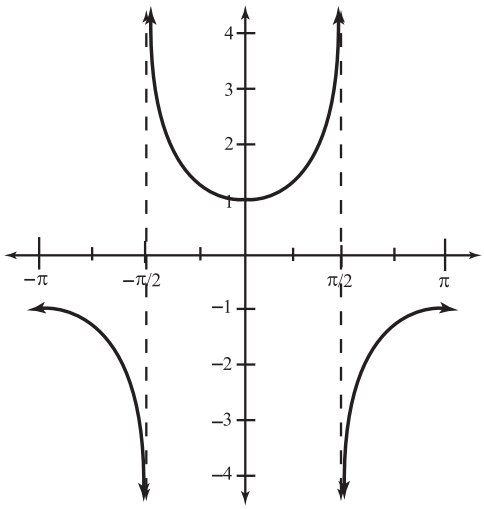


Figura 4.6

$y = \sec x$.

Ponto Crítico

É importante saber como o 0 afeta a fração. Se o 0 aparecer no denominador de uma fração, ela é considerada "indefinida". Vai contra as leis da matemática fazer divisões por 0, e as penalidades são duras (é igual a quando você arranca etiquetas de colchões). Por outro lado, se o 0 aparecer no numerador de uma fração (mas não no denominador, novamente... ainda não é permitido), então o valor da fração é 0, não importa qual seja o número no denominador.

Cossecante (escrita como $y = \csc x$)

Muito similar à sua cofunção irmã, essa função tem o mesmo contradomínio e período que a secante, com diferença somente no domínio. Por ser definida como a recíproca do seno, $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, a cossecante terá o mesmo domínio da cotangente, já que possuem o mesmo denominador (veja a Figura 4.7). Basicamente, quatro funções trigonométricas se baseiam em outras duas (seno e cosseno), então, essas duas sozinhas são suficientes para gerar valores para o restante.

Alerta do Kelley

A cossecante não é a recíproca do cosseno. Muitas vezes, as pessoas os colocam juntos devido ao mesmo som inicial, mas está errado. Da mesma forma, a secante não é a recíproca do seno.

Exemplo 2: Se $\cos\theta = \frac{1}{3}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, encontre tan θ e sec θ.

Solução: Vamos por partes. Primeiro, você sabe que $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, então:

$$\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}}$$

Multiplique a parte de cima e a de baixo por 3 e simplifique a fração:

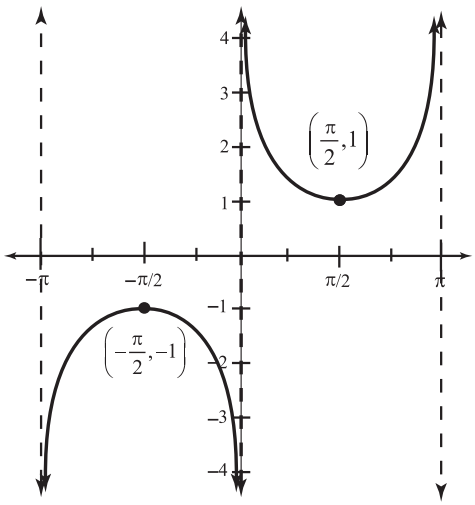
$$\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{1}} = -\sqrt{8}$$

Agora, vamos à sec θ - essa é ainda mais fácil. Como você sabe que $\cos\theta = \frac{1}{3}$, e $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ (porque a secante é a recíproca do cosseno):

$$\sec\theta = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Figura 4.7

y = csc *x*.



Qual É o Seno: O Círculo Unitário

Ninguém espera que você consiga avaliar a maioria das expressões trigonométricas de cabeça. Se alguém apontasse uma arma para a minha cabeça e me pedisse para

encontrar $\cos\frac{3\pi}{7}$ com uma precisão de ,001, eu primeiro deitaria calmamente no chão, fazendo um círculo de giz ao meu redor e me prepararia para a morte. Eu não teria chances sem uma calculadora ou uma capacidade ao estilo "Rain Man" para calcular. Para a maioria das aulas de cálculo, no entanto, você vai precisar saber alguns valores trigonométricos sem ter de pensar por nem um segundo.

Esses valores são derivados de algo chamado *círculo unitário*, um círculo com raio 1 que gera valores comuns para seno e cosseno. Você não precisa necessariamente saber como chegar a esses valores (ou como funciona um círculo unitário), mas deve memorizá-los. Faça anotações, decore-os com um amigo, faça uma tatuagem – qualquer método que você use para se lembrar das coisas –, mas memorize os valores do círculo unitário presentes na Figura 4.8.

de•fi•ni•ção

O **círculo unitário** é um círculo com raio 1 que pode ser usado para gerar os valores mais comuns do seno e cosseno. Em vez de gerá-los toda vez que precisar, é melhor memorizá-los.

Ângulo (radianos)	Cosseno	Seno	Ângulo (radianos)	Cosseno	Seno
0	1	0	π	-1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$

Figura 4.8

O temido círculo unitário, um mal necessário do cálculo. Memorize-o agora e evite traumas no futuro.

Se você estiver com dificuldades para se lembrar do círculo unitário, procure os padrões. Se mesmo assim for impossível memorizar esses valores, e seu professor não se opuser, pelo menos tenha uma tabela com essas informações em um lugar de fácil acesso, pois você irá consultá-la com frequência.

Agora que você conhece o círculo unitário e todas as outras loucuras das funções trigonométricas, seus poderes aumentaram. (Somente certifique-se de que os usará para o bem, não para o mal). Na verdade, você pode analisar muitas outras funções, como demonstrado no próximo exemplo.

Exemplo 3: Encontre o valor de $\cos\frac{23\pi}{4}$ sem usar a calculadora.

Solução: Você só conhece os valores de seno e cosseno de 0 radiano a 2π radianos.

Claramente, $\frac{23\pi}{4}$ é muito grande para caber nesse intervalo limitado. Porém, já que o cosseno é uma função periódica, seus valores se repetirão. Como o período do cosseno é 2π, você pode encontrar um ângulo coterminal a $\frac{23\pi}{4}$, que aparece no nosso círculo unitário, e analisá-lo — a resposta será a mesma.

De acordo com o Exemplo 1 deste capítulo, tudo o que você deve fazer é somar ou subtrair o período (novamente, de 2π para o cosseno), e você terá um ângulo coterminal. Estou procurando um ângulo menor que $\frac{23\pi}{4}$, então, vou subtrair 2π. Não se esqueça dos denominadores comuns para subtrair corretamente:

$$\frac{23\pi}{4} - 2\pi = \frac{23\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$$

Ainda está muito grande (o maior ângulo $\frac{\pi}{4}$ que já memorizei é $\frac{7\pi}{4}$), então tenho que subtrair novamente:

$$\frac{15\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Como $\frac{7\pi}{4}$ e $\frac{23\pi}{4}$ são coterminais, $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{23\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Você Tem Problemas

Problema 1: Avalie $\cos\frac{14\pi}{4}$ usando um ângulo coterminal e o círculo unitário.

Você pode estar interessado em saber como o círculo unitário se origina e de onde vêm os valores citados. Aqui vai uma rápida explicação baseada na Figura 4.9. Um círculo unitário é somente um círculo com raio 1, e vamos centralizá-lo na origem. Agora, desenhe um segmento saindo da origem que forme um ângulo de 30 graus $\left(\frac{\pi}{6}\text{ radiano}\right)$ com o eixo *x* positivo no primeiro quadrante, e marque o ponto onde o raio intercepta o círculo. As coordenadas do ponto são, respectivamente, o cosseno e o seno de $\frac{\pi}{6}$. Para encontrar as coordenadas do ponto, encontre os catetos do triângulo retângulo.

Identidades Incrivelmente Importantes

Uma identidade é uma equação que é sempre verdadeira, independentemente do argumento. É fácil dizer que, de acordo com essa definição, $x + 1 = 7$ não é uma identidade, pois só é verdadeira quando $x = 6$. Porém, considere a equação $2(x - 1) + 3 = 2x + 1$. Se você inserir $x = 0$, seu resultado é $1 = 1$, o que é definitivamente verdade, não é? Experimente inserir qualquer número real, e você obterá outra afirmação verdadeira. Assim, $2(x - 1) + 3 = 2x + 1$ é uma identidade.

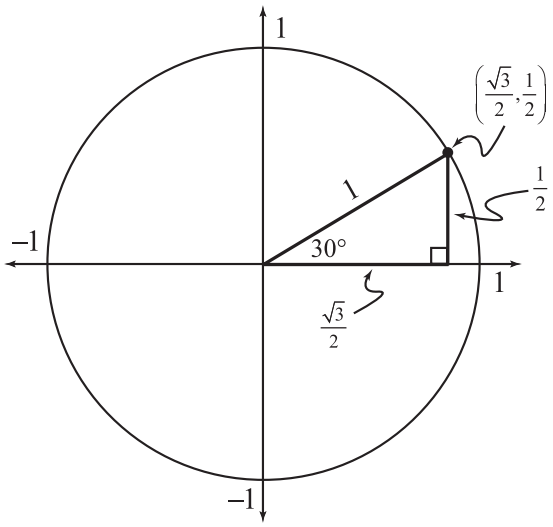


Figura 4.9

Os catetos do triângulo retângulo de 30-60-90 graus são os valores do cosseno e seno de $30° = \frac{\pi}{6}$, o ângulo da origem.

Vale a pena ressaltar que esta é uma identidade muito "idiota". Você não vai impressionar ninguém com essa equação. Com apenas dois segundos de esforço, você pode simplificar o lado esquerdo e mostrar que ambos os lados são iguais. A maioria das identidades matemáticas é muito mais útil porque não fica imediatamente óbvio que são verdadeiras. Especificamente, as identidades trigonométricas te ajudam a escrever equações, simplificar expressões e justificar respostas para equações. Com isso em mente, vamos explorar as identidades trigonométricas mais comuns. Vale a pena memorizá-las, se ainda não as conhecer.

Identidades Pitagóricas

As três identidades mais importantes de todas são as pitagóricas. Elas têm esse nome porque foram criadas com o Teorema de Pitágoras. Você se lembra dessa joia da geometria? Dizia que a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa: $a^2 + b^2 = c^2$. Sempre chamei essas identidades de teoremas do Pai, Mãe e Bebê (por conta do conto de fadas dos Três Ursos), tanto por diversão quanto pelo fato de não terem nomes comumente aceitos. Se eu estivesse na companhia dos *nerds* da matemática, no entanto, não usaria esses termos. Eles ficariam te encarando com cara de poucos amigos.

- Teorema Mãe: $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$
- Teorema Pai: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- Teorema Bebê: $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Você Tem Problemas

Problema 2: O Teorema da Mãe é uma identidade e, portanto, verdadeiro para todo argumento. Mostre que é verdadeiro para $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ponto Crítico

Os fãs do *Mágico de Oz* devem se lembrar que o Espantalho menciona uma fórmula quando o Grande e Poderoso Oz lhe dá um cérebro. Ele diz: "A soma das raízes quadradas de dois lados do triângulo isósceles é igual à raiz quadrada do lado remanescente". Essa afirmação é falsa! Ele deveria, talvez, ter citado o Teorema de Pitágoras, já que é um dos mais reconhecidos pelo público geral, mas errou feio. Talvez Oz não fosse tão poderoso assim. A série de casamentos que não deram certo do Homem de Lata e a falta de sucesso do Leão como palestrante motivacional são outras provas do pouco esforço de Oz na hora de dar algo a eles.

Agora, veremos como as funções e identidades trigonométricas podem facilitar nossas vidas. Com um pouco de conhecimento em trigonometria e um pouco de esforço físico, até expressões feias podem se tornar bonitas.

Exemplo 4: Simplifique a expressão trigonométrica $\frac{\cos^2 x}{\text{sen } x} + \text{sen } x$ usando uma identidade pitagórica.

Solução: Um desses termos é uma fração. Você sabe que, primeiro, deve ter denominadores comuns para somar frações, então, multiplique o segundo termo por $\frac{\text{sen } x}{\text{sen } x}$ para ter os denominadores relacionados de sen *x*:

$$\frac{\cos^2 x}{\text{sen } x} + \frac{\text{sen } x}{1} \cdot \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} = \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x} + \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen } x}$$

Agora que os denominadores estão iguais, você pode fazer a adição no numerador e não mexer no denominador:

$$\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen } x}$$

Isso não parece mais fácil! Espere um pouco. O numerador é exatamente como o Teorema da Mãe e, de acordo com ele, $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Assim, coloque 1 no lugar do numerador:

$$\frac{1}{\text{sen } x}$$

Você poderia parar por aí, mas não quer parar! Você também sabe que $\frac{1}{\text{sen } x} = \csc x$, já que a cossecante é a recíproca do seno. Assim, a resposta final é csc x.

Alerta do Kelley

A notação $\cos^2 x$ é a abreviação de $(\cos x)^2$. Não faria sentido que as letras "cos" fossem elevadas ao quadrado. A notação abreviada é usada para evitar ter de escrever os parênteses extras.

Fórmulas de Duplo Ângulo

Essas identidades permitem que você escreva expressões trigonométricas com duplos ângulos (como sen $2x$ e cos 2θ) em expressões equivalentes de um ângulo. Em outras palavras, essas expressões eliminam um coeficiente 2 em uma expressão trigonométrica.

- sen $2x = 2\text{sen } x \cos x$ (esta é a fórmula mais simples de duplo ângulo, e é útil memorizá-la)
- $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1$
  $= 1 - 2\,\text{sen}^2 x$

As fórmulas de duplo ângulo do cosseno são mais complicadas – há três coisas diferentes que podem ser substituídas por cos $2x$. Você deve escolher qual substituir com base no resto do problema. Se parecer que há muitos senos na equação ou expressão, use a última das três, por exemplo.

Ponto Crítico

Existem muitas identidades trigonométricas – não somente as deste capítulo –, mas você vai usar estas mais que todas as outras juntas.

Não há muito o que entender sobre as fórmulas de duplo ângulo. Você deve estar pronto para reconhecê-las rapidamente, já que os problemas raramente vêm com o aviso: "Cuidado: este problema requer que você saiba fórmulas básicas de duplo ângulo. Mantenha longe dos olhos. Pode ser prejudicial para crianças menores de 3 anos". Veja como é discreta a forma como elas aparecem:

Exemplo 5: Fatore e simplifique a expressão $\cos^4 \theta - \text{sen}^4 \theta$.

Solução: Essa expressão é a diferença de quadrados perfeitos, então pode ser fatorada da seguinte forma: $(\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta)(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)$. Perceba que a quantidade à esquerda é igual a 1, de acordo com o Teorema da Mãe, e a quantidade à direita é igual a cos $2x$, de acordo com as fórmulas de duplo ângulo. Assim, podemos substituir esses valores para chegar a $(1)(\cos 2x) = \cos 2x$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Fatore e simplifique a expressão $2\text{sen}\, x \cos x - 4\text{sen}^3 x \cos x$.

Resolvendo Equações Trigonométricas

A última habilidade trigonométrica realmente importante que você deve adquirir é a de resolver equações trigonométricas. Atenção: alguns professores de matemática ficam irritados ao discutir o assunto. Você deve ler as instruções para esse tipo de problema com muito cuidado para ter certeza de que a resposta é correta para o que está sendo perguntado.

Ponto Crítico

Quando os intervalos são especificados como $[0,2\pi)$, é uma forma abreviada de $0 \leq x < 2\pi$. Os dois números na notação representam os limites mais altos e mais baixos do intervalo aceito, e os colchetes ou parênteses indicam se o limite está incluso no intervalo ou não. Se for um colchete, o limite está incluso, mas não está se forem parênteses. Na notação do intervalo, a expressão $x \geq 7$ tem a aparência $[7,\infty)$. Como não há limite superior, escreve-se infinito. Se o infinito for um dos limites, sempre se usa um parêntese a seu lado.

Alerta do Kelley

Se seu professor exigir uma resposta por equação, elimine todas as soluções, menos aquela (e haverá somente uma) que se encaixe no contradomínio apropriado. Esse contradomínio é $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ para o seno, tangente e cossecante; para cosseno, cotangente e secante, use o intervalo de $0 \leq \theta \leq \pi$.

Cada um dos meus exemplos trará a solução para a equação trigonométrica no intervalo $[0,2\,\pi)$. No entanto, pode haver mais de uma resposta. Alguns professores pedirão para que você escreva uma resposta correta específica para cada equação. Em outras palavras, apesar de haver muitas maneiras de resolver o problema, eles só aceitarão uma resposta. Essa resposta geralmente se encaixa num contradomínio específico, e desde que aprenda o contradomínio apropriado para cada função trigonométrica, você se sairá bem. A melhor maneira de resolver isso é perguntar se ele vai querer respostas para um determinado intervalo ou se ele aceitará somente a resposta que se encaixa no contradomínio apropriado.

O procedimento para resolver equações trigonométricas não é diferente do usado para resolver equações normais. Porém, o último passo normalmente requer que você se lembre do círculo unitário!

Exemplo 6: Resolva a equação $\cos 2x - \cos x = 0$ no intervalo $[0,2\pi)$.

Solução: Primeiro, você quer eliminar a fórmula de duplo ângulo para que todos os termos sejam ângulos simples. Já que você vai substituir $\cos 2x$, há três opções, mas vou escolher a opção $2\cos^2 x - 1$, já que o problema contém outro cosseno:

$$(2\cos^2 x - 1) - \cos x = 0$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Agora você pode fatorar essa equação. (Se estiver com problemas, pense na equação como $2w^2 - w - 1$ e fatore-a, substituindo $w = \cos x$ quando terminar).

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

Como em qualquer equação de segundo grau resolvida com o método da fatoração, defina cada fator igual a 0 e resolva:

$$2\cos x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \cos x - 1 = 0$$
$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos x = 1$$

Para terminar, pergunte-se: "Quando o cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ e quando é 1?"
A questão pede todas as respostas em $[0,2\pi)$, então, dê todas as respostas corretas no círculo unitário:

$$x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \text{ou } 0$$

As três respostas devem ser dadas.

Se seu professor exigir somente respostas no contradomínio apropriado, suas soluções seriam $x = \frac{2\pi}{3}$ e $x = 0$. Você eliminaria $x = \frac{4\pi}{3}$ porque não se encaixa no contradomínio correto do cosseno de $0 \le \theta \le \pi$. Nesse caso, é correto ter duas respostas, já que cada uma das equações menores possui uma resposta.

Você Tem Problemas

Problema 4: Resolva a equação $\text{sen } 2x + 2\text{sen } x = 0$ e dê todas as soluções no intervalo $[0,2\pi)$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- As seis funções básicas da trigonometria são seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.
- Os valores de seno e cosseno são usados para avaliar as outras quatro funções trigonométricas.
- Há alguns ângulos no intervalo $[0,2\pi)$ cujos valores de seno e cosseno devem ser memorizados.
- As identidades trigonométricas ajudam a simplificar as expressões trigonométricas e a resolver equações.

Parte 2 Assentando as Bases do Cálculo

Tenho uma notícia boa e uma ruim. A boa notícia é que nós vamos lidar com funções relativamente fáceis para falar sobre o resto de cálculo. A notícia ruim é que precisamos definir matematicamente o que exatamente é "fácil". Quando os matemáticos se sentam e decidem definir as coisas, você sabe que os teoremas começam a surgir – e em cálculo não é diferente.

Quando dizemos funções "fáceis", queremos dizer contínuas. Para ser contínua, a função não pode conter "buracos" nem intervalos. Soa bem, mas os matemáticos gostam de definições mais específicas (leia-se "complicadas") do que isso. Para definir "contínuo", antes teremos de determinar algo chamado "limite". Nesta parte do livro, você vai aprender o que é limite, como avaliar limites de funções e como usar esse conceito para estabelecer a definição de continuidade.

POR QUE ESTÁ TÃO MAL-HUMORADA?
PENSEI QUE A PROFESSORA FOSSE LIMITAR O NOSSO DEVER DE CASA E NÃO PASSAR "LIMITE" COMO LIÇÃO DE CASA.

Capítulo 5

Chegue ao Limite

Neste Capítulo

- Entendendo o que é limite
- Por que limites são necessários
- Aproximando limites
- Limite lateral e geral

A maioria das pessoas, quando olha para o cálculo depois de tê-lo estudado, pergunta-se por que afinal teve de aprender limites. Para alguns, é como ter todos os dentes arrancados de uma só vez. Após uma discussão breve acerca do assunto no início do curso, ele volta pouquíssimas vezes, e quando o faz, é apenas para um papel secundário ao tópico em discussão. No entanto, limites são extremamente importantes para o desenvolvimento do cálculo e todas as técnicas mais significativas, incluindo diferenciação, integração e série infinita.

Conforme discuti no Capítulo 1, limites são os ingredientes-chave na descoberta do cálculo. Eles nos permitem fazer coisas de que a matemática normal não dá conta. Na prática, os limites são o primeiro encontro dos estudantes com um assunto relativamente filosófico da matemática, que respondem a perguntas como "ainda que esta função seja indefinida para este valor de x, a que altura ela tendia?". Este capítulo vai torná-lo intuitivo sobre o que é limite e o que significa dizer que uma função tem limite; o próximo capítulo vai ajudá-lo a avaliar limites.

Um último comentário: a definição oficial de limite é chamada definição delta-ípsilon. É bastante complexa e baseia-se em matemática de alto nível. Uma discussão acerca desse conceito matemático rigoroso não é benéfica e, portanto, será omitida. Basicamente, você pode ser um ótimo motorista sem entender cada princípio do motor de combustão.

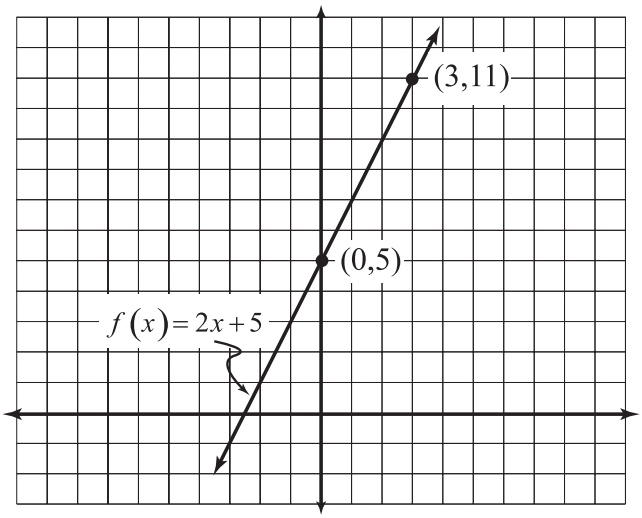
O que É Limite?

Quando estudei cálculo pela primeira vez, no ensino médio, eu curtia avaliar limites com milhares de técnicas diferentes antes de me dar conta de que não tinha ideia do que exatamente estava fazendo – e nem mesmo o porquê. Sou daquelas pessoas que precisam de algum entendimento universal em uma aula de matemática, algo que me fizesse visualizar por que estava usando aquele processo em questão. Infelizmente, professores de cálculo são notórios por explicarem *como* completar um problema (enfatizando as etapas e regras), mas sem explicar *o que ele significa*. Então, para o seu benefício – e meu também – discutiremos o que é limite antes de ficarmos malucos com a parte matemática das coisas.

Vamos começar com uma função simples: $f(x) = 2x + 5$. Você já sabe que se trata de uma linha de inclinação 2 e o y é interceptado em 5. Se você colocar $x = 3$ nesta função, a imagem será $f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$. Muito simples, todos entendem, todos ficam felizes. Mas o que mais isso quer dizer? Quer dizer que o ponto (3, 11) pertence à relação e função que chamo de f. Além disso, significa que o ponto (3, 11) fica no gráfico de $f(x)$, como apontado na Figura 5.1.

Figura 5.1

O ponto (3,11) fica no gráfico de *f*.



Tudo isso parece bem óbvio, mas vamos mudar de assunto um pouco para nos prepararmos para limites. Note que enquanto você se aproxima de $x = 3$, o gráfico se move para $y = 11$. Na verdade, se você usar $x = 2{,}9$ em $f(x)$, terá $f(2{,}9) = 2(2{,}9) + 5 = 10{,}8$.

Se você usar $x = 2{,}95$, a imagem é 10,9. Argumentos próximos de 3 dão imagens de x próximas de 11 – quanto mais o argumento se aproxima de 3, mais a imagem de x se aproxima de 11.

Mesmo se você não soubesse que $f(3) = 11$ (digamos que você foi proibido por sua madrasta má, como a Cinderela), você poderia descobrir um *provável* resultado utilizando um número incrivelmente próximo de 3, como 2,99999. Vou poupá-lo do trabalho sujo e dizer que $f(2{,}99999) = 10{,}99998$. É óbvio que f tende ao ponto (3, 11), e é isso o que significa limite.

Limite é o ponto máximo a que uma função tende dado um valor de x – e não importa se a função chega ou não a esse ponto máximo. No caso de f, você já sabe que f tende a 11 quando $x = 3$, mas não tem que ser o caso de existir um limite. Lembre-se que limite é a "altura" a que uma função tende.

de•fi•ni•ção

Limite é o ponto máximo ao qual uma função *tende* com um dado valor de x, não importando se ela o alcança ou não.

Pode Alguma Coisa Ser Nada?

Você pode se perguntar: "Como é que eu vou saber a que uma função *tende*? Eu não sei nem mesmo qual é a minha tendência para o futuro!". Ainda bem que funções são mais previsíveis do que pessoas, mas vamos falar disso depois. Vamos dar uma olhada em um problema um pouco mais difícil envolvendo limites, mas, antes, vamos discutir como o limite é representado em cálculo.

Em nosso outro exemplo, determinamos que o limite de $f(x)$ é igual a 11 quando x se aproxima de 3 porque a função também se aproximou de 11 quando trocamos x por outros valores próximos a 3. Tal como em tudo, cálculo tem uma notação abreviada para isso:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 11$$

Lê-se: "O limite de $f(x)$, à medida que x se aproxima de 3, é igual a 11". O 3 é o número do qual você se aproxima, $f(x)$ é a função em questão e 11 é a tendência de 3. Agora, vamos dar uma olhada em um exemplo mais desenvolvido.

A Figura 5.2 é o gráfico de $g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$. Claramente, o domínio de g não pode conter $x = -2$ porque isso resultaria em denominador 0, e isso é simplesmente asqueroso.

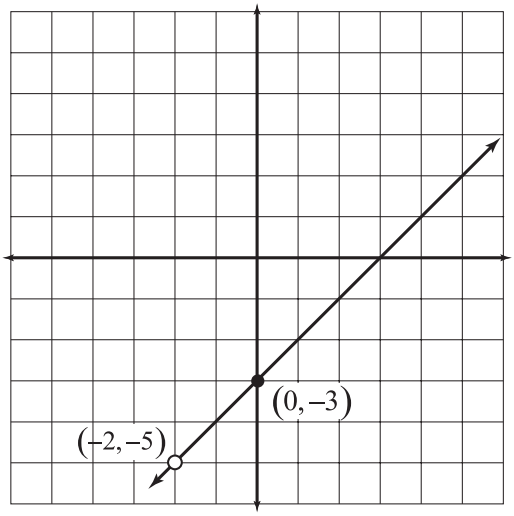
Ponto Crítico

Se você usar $x = -2$ terá $g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$, considerada "forma indeterminada". Tipicamente, um resultado de $\frac{0}{0}$ significa que há uma quebra no gráfico nesse valor de x, como é o caso em g.

Note que o gráfico de g tem uma quebra no terrível valor de $x = -2$, mas isso não pode nos impedir de continuar. Vamos avaliar o limite bem ali. Lembre-se que a função na verdade não tem de existir em um certo ponto para que um limite exista – ela apenas precisa tender a algo. É claro que a função tende a uma certa "altura" quando $x = -2$ no gráfico – aliás, há uma quebra bem ali.

Figura 5.2

Gráfico de $g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$.



Ponto Crítico

Vamos avaliar limites como $\lim_{x \to 3} f(x)$ e $\lim_{x \to -2} g(x)$ no próximo capítulo sem recorrer à técnica do "número incrivelmente próximo". Neste capítulo, vamos focar a ideia de limite e chegaremos à parte computacional em breve.

Como você pode avaliar $\lim_{x \to -2} g(x)$? Como fizemos no exemplo anterior, você usará um número incrivelmente próximo de $x = -2$, no caso $x = -1{,}99999$. Novamente, vou fazer o trabalho sujo para você (pode me agradecer depois): $g(-1{,}99999) = -4{,}99999$. Até mesmo um cabeça-dura como eu pode ver que essa função tende a –5 na função g quando $x = -2$. Assim, $\lim_{x \to -2} g(x) = -5$, ainda que o ponto (–2, –5) não apareça no gráfico de $g(x)$. Esse é um exemplo de limite existente porque a função tende a uma altura apesar de não alcançá-la na verdade.

Limites Laterais

Ocasionalmente, uma função tenderá a duas alturas diferentes com um x determinado: uma altura quando se começa do lado esquerdo, e outra do lado direito. Ainda podemos descrever essas alturas laterais usando os *limites laterais direito* e *esquerdo*. Para entender melhor esse comportamento bizarro de uma função, observe o gráfico de $h(x)$ na Figura 5.3.

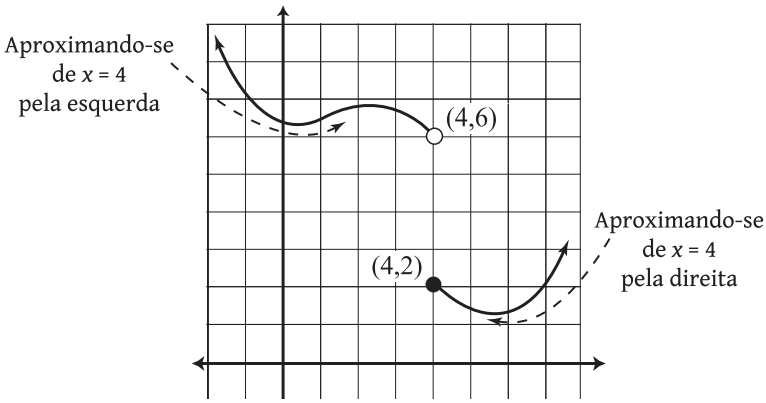


Figura 5.3

O gráfico de $h(x)$ tem duas partes. Um gráfico assim é geralmente resultado de uma função definida por partes.

Esse gráfico faz uma coisa bem maluca em $x = 4$: ele se quebra. Acompanhe o gráfico com a ponta do seu dedo aproximando-se de $x = 4$ a partir da esquerda. Seu dedo tende a que altura enquanto você chega perto (mas não necessariamente alcança) $x = 4$? Você se aproxima de 6. Isso é chamado de limite esquerdo e é escrito desta forma:

$$\lim_{x \to 4^-} h(x) = 6$$

definição

Um **limite esquerdo** é a altura a que uma função tende à medida que você se aproxima de x *a partir* da esquerda; o **limite direito** é a altura a que um gráfico tende à medida que você se aproxima de x a *partir* da direita.

O sinal negativo no expoente indica que você apenas deve se interessar pela altura à qual o gráfico tende à medida que você passeia por ele a partir da esquerda. Se você acompanhar a outra porção do gráfico com o dedo, agora em direção a $x = 4$ e a partir da direita, você vai notar que se aproxima da altura 2 quando chega perto de $x = 4$. Esse é, como você já deve ter adivinhado, o limite direito para $x = 4$, e se escreve da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 4^+} h(x) = 2$$

Ponto Crítico

Para não confundir limite esquerdo e direito, lembre-se da expressão-chave: *a partir de*. O gráfico tende ao limite esquerdo quando você se aproxima de x *a partir* da esquerda, e não em *direção* à esquerda no gráfico.

Até agora, falamos apenas de um limite geral (em outras palavras, um limite que não envolve uma direção, como da direita ou esquerda). Na maioria das vezes, em cálculo, você vai se preocupar com limites gerais, mas para que eles existam, os

limites esquerdo e direito também devem estar presentes; aprenderemos isso na próxima seção, na qual vamos amarrar tudo o que discutimos até agora sobre isso. Está sentindo a eletricidade no ar?

Quando Existe um Limite?

Se você não conseguiu entender nada até agora neste capítulo, procure entender esta seção. Ela traz as duas características essenciais de limite: quando existe e quando não existe. Se você entendeu tudo até agora, você tende a compreender o tópico mais importante de cálculo. Estou muito orgulhoso de você... lembro-me de quando começou os estudos...

Esta é a chave para limite: para que exista limite em uma função *f* em um valor *x* (vamos generalizar com $x = c$), três coisas devem acontecer:

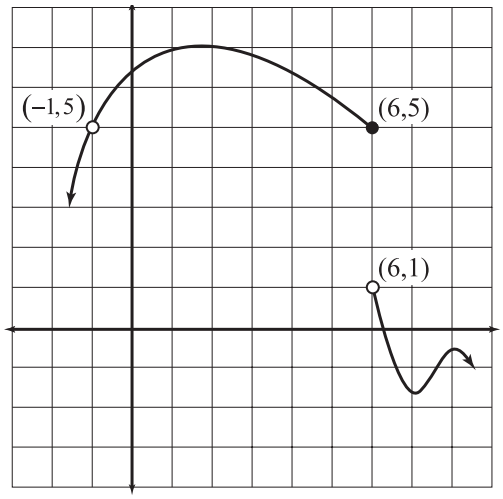
1. O limite esquerdo deve existir em $x = c$.
2. O limite direito deve existir em $x = c$.
3. Os limites esquerdo e direito em *c* devem ser iguais.

Nos livros de cálculo é escrito desta forma: Se $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$, então existe $\lim_{x \to c} f(x)$ que é igual aos limites laterais.

O diagrama na Figura 5.4 ilustra bem esse ponto.

Figura 5.4

Mais um gráfico medonho chamado $f(x)$. Você consegue apontar onde não existe o limite?



Há dois valores de *x* interessantes nesse gráfico: $x = -1$ e $x = 6$. Em um desses valores existe um limite geral e no outro não. Você consegue dizer qual é qual usando as orientações acima?

Você está prosseguindo com a leitura, não é? Bem, pare já! Não leia mais nada antes de tentar responder à pergunta que fiz. Vamos! Estou de olho!

Resposta: $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe e $\lim_{x \to 6} f(x)$ não. Lembre-se de que para que exista limite, os limites esquerdo e direito têm de existir nesse ponto e devem ser iguais. À medida que você se aproxima de $x = -1$ a partir da esquerda e da direita, você sempre tende a 5, então os dois limites laterais existem e são iguais, o que nos permite concluir que $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$ (ou seja, o limite geral à medida que x se aproxima de -1 em $f(x)$ é igual a 5).

Mas esse não é o caso quando aproximamos $x = 6$ da direita para a esquerda. Na verdade, $\lim_{x \to 6^-} f(x) = 5$ enquanto $\lim_{x \to 6^+} f(x) = 1$. Como esses limites laterais não são iguais, dizemos que não existe limite geral em $x = 6$ e que $\lim_{x \to 6} f(x)$ não existe.

Ponto Crítico

Visualmente, existe limite se o gráfico não quebrar nesse ponto. Para o gráfico de $f(x)$ em questão, há uma quebra em $x = 6$, mas não em $x = -1$, o que significa que não existe limite na quebra, mas pode existir no intervalo do gráfico. Lembre-se de que pode existir um limite mesmo se a função não estiver lá – existe limite se a função tender a uma altura específica a partir de cada direção.

Quando Não Existe um Limite?

Você já conhece um exemplo em que não existe limite, mas outras duas circunstâncias podem arruinar um limite também.

- Não existe um limite geral se os limites esquerdo e direito forem diferentes.

Em outras palavras, se há uma quebra no gráfico de uma função, e as duas partes da função não se encontram em um determinado ponto, não existe limite geral. Na Figura 5.5, $\lim_{x \to c} g(x)$ não existe porque os limites esquerdo e direito são diferentes.

- Um limite geral não existe se uma função cresce ou decresce infinitamente a um determinado valor de x (por exemplo, a função cresce ou decresce sem destino).

Para que exista limite, a função deve se aproximar de alguma altura numérica fixa. Se a função cresce ou decresce infinitamente, não existe limite. Na Figura 5.6, $\lim_{x \to c} h(x)$ não existe porque $h(x)$ tem uma assíntota vertical em $x = c$, o que faz a função crescer sem limite aí. Um limite deve ser um número finito para realmente existir.

Figura 5.5

Gráfico de $g(x)$.

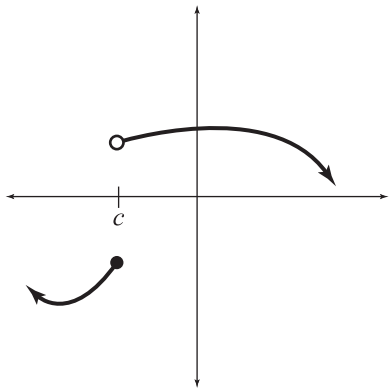


Figura 5.6

Gráfico de $h(x)$.

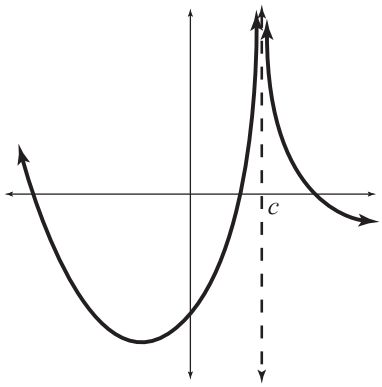
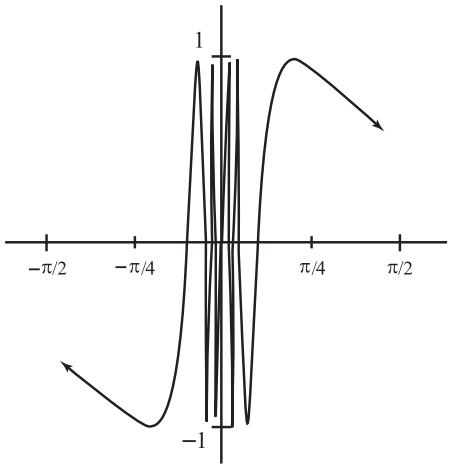


Figura 5.7

O gráfico de $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$; $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ não existe.



- Um limite geral não existe se uma função oscila infinitamente, sem nunca se aproximar de alguma altura.

Isso é raro, mas, às vezes, uma função pode oscilar continuamente para lá e para cá, sem nunca alcançar um valor numérico. Quando esse é o caso, não existe limite. Justamente por ser algo raro, a maioria dos livros de cálculo dá o mesmo exemplo para discutir esse tópico, e eu não vou fazer diferente (pressão social "matemática" não é fácil, devo dizer). Não existe limite geral em $x = 0$ na Figura 5.7 porque a função nunca estabelece um único valor quanto mais perto você chega de $x = 0$.

Exemplo: Uma função $f(x)$ é definida pelo gráfico na Figura 5.8. Com base no gráfico e em seu conhecimento extraordinário sobre limites, avalie os limites a seguir. Se não existir nenhum, explique o porquê.

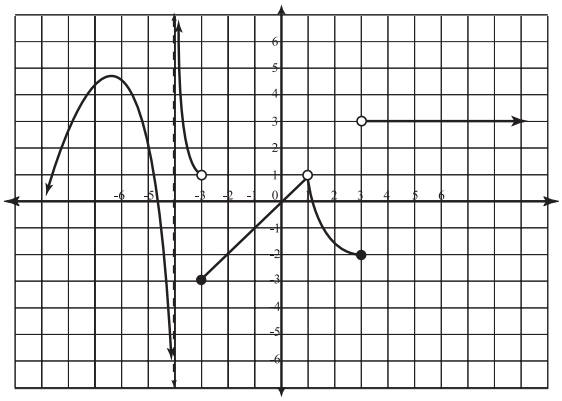


Figura 5.8

O gráfico hipnótico de $f(x)$. Os mortais podem virar pedra quando dão de cara com essa imagem terrível.

a) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$

Solução: À medida que você se aproxima de $x = -4$ a partir da direita, a função cresce sem destino. Você pode escrever a resposta de duas formas. Pode dizer que não existe limite porque a função cresce infinitamente, ou escrever $\lim_{x \to -4^+} f(x) = \infty$.

Alerta do Kelley

Se um gráfico não tem limite geral em algum de seus valores de x, isso não afeta qualquer outro valor de x. Por exemplo, na Figura 5.7 existe limite geral em cada valor de x, exceto $x = 0$.

b) $\lim_{x \to 4} f(x)$

Solução: À medida que você se aproxima de $x = 4$ a partir da direita e da esquerda, a função tende a 3. Portanto, o limite geral existe e é –3.

Ponto Crítico

Dar uma resposta de limite ∞ ou $-\infty$ é o equivalente a dizer que não existe. No entanto, responder ∞ também (1) explica por que o limite não existe e (2) detalha especificamente se a função cresceu ou decresceu infinitamente.

c) $\lim_{x \to -3} f(x)$

Solução: Aqui não existe limite geral porque o limite esquerdo (1) não é igual ao direito (–3).

Você Tem Problemas

Aqui estão alguns limites para você se testar com base no gráfico $f(x)$ usado no exemplo da Figura 5.8.

1. $\lim_{x \to -4^-} f(x)$
2. $\lim_{x \to 3} f(x)$
3. $\lim_{x \to 1} f(x)$

O Mínimo que Você Precisa Saber

- O limite de uma função em um determinado valor de *x* é a altura a que uma função tende.
- Uma função pode ter um limite em um valor de *x* se houver uma quebra nesse ponto.
- Uma função não pode ter um limite na quebra de seu gráfico.
- Os limites esquerdo e direito de uma função existem e são iguais em um determinado $x = c$, portanto, o limite existe em *c*.
- Não existe limite em casos de crescimento ou oscilação infinita de uma função.

Capítulo 6

Avaliando Limites Numericamente

Neste Capítulo

- Três métodos fáceis para determinar limites
- Limites e assíntotas
- Encontrando limites no infinito
- Teoremas de limites trigonométricos e exponenciais

Agora você sabe o que é limite, quando ele existe e quando não existe. No entanto, permanece a questão de como realmente avaliar limites. No Capítulo 5, nós aproximamos limites usando valores de x loucamente próximos ao número de que estávamos nos aproximando, mas ficamos entediados muito rápido. Assim que você começa a elevar números como 2,999999 a várias potências, fica claro que você precisa de um método melhor ou de uma cartela de aspirinas.

Boas notícias! Existem muitos métodos melhores, e este capítulo vai ensinar os principais processos para avaliar limites, assim como os teoremas de limite importantes que seria bom que você memorizasse. Para aqueles de vocês que se sentiram um pouco desconfortáveis com a matemática quase conceitual e filosófica que encaramos, não se preocupe – vamos voltar às confortáveis, familiares, suaves, macias e previsíveis técnicas e fórmulas matemáticas.

Toda aquela teoria que você aprendeu no capítulo passado vai retornar em certo grau no Capítulo 7, onde vamos discutir continuidade de funções. Por isso, mantenha tudo fresquinho na sua mente. Uma boa parte da nossa discussão sobre limites vai ficar rapidamente obscura quando chegarmos à parte das derivadas e integrais. Certifique-se de voltar algumas páginas e rever esses tópicos iniciais diversas vezes durante o seu curso de cálculo para manter tudo bem fresco no seu cérebro.

Os Principais Métodos

A grande maioria dos limites pode ser avaliada por meio de três técnicas: substituição, fatoração e conjugação. Normalmente, apenas uma dessas técnicas vai funcionar em determinado problema de limite, então você deve tentar um método de cada vez até achar aquele que funcione. Como eu sou eficiente (entenda "extremamente preguiçoso"), eu sempre tento o método mais fácil antes, e só recorro aos mais complicados se realmente for necessário. Assim, vou apresentar os métodos começando do mais fácil até o mais difícil.

Método da Substituição

Prepare-se! Você vai chorar de alegria quando eu te disser isso. Muitos limites podem ser avaliados simplesmente utilizando-se o valor de x do qual você se aproxima na função. O termo especial para isso é método da substituição (ou método da substituição direta).

Exemplo 1: Avalie $\lim_{x \to 4}\left(x^2 - x + 2\right)$.

Solução: Para avaliar o limite, apenas utilize o número do qual você se aproxima (4) como variável:

$$4^2 - 4 + 2 = 16 - 2 = 14$$

De acordo com o método de substituição,

$$\lim_{x \to 4}\left(x^2 - x + 2\right) = 14$$

Foi fácil demais! Só para ter certeza de que você realmente se esforçou, vamos verificar a resposta no gráfico de $y = x^2 - x + 2$ na Figura 6.1.

À medida que nos aproximamos de $x = 4$ a partir da esquerda ou da direita, a função tende a 14, o que garante a existência de um limite: 14. Funcionou! É isso aí!

Ponto Crítico

Quando digo que os métodos de avaliação de limites são listados do mais fácil para o mais difícil, eu devo qualificar isso dizendo que "difícil" não é uma boa escolha de palavra; nenhum desses métodos é difícil. O número de etapas aumenta um pouco de um método para o outro, mas eles são fáceis!

Se todos os problemas de limite do mundo pudessem ser resolvidos pelo método da substituição, provavelmente ninguém precisaria de Prozac. No entanto (sempre tem um "porém", não é mesmo?), nem sempre ele pode ser usado. Nesses casos, você deve tentar o próximo método da lista: fatoração.

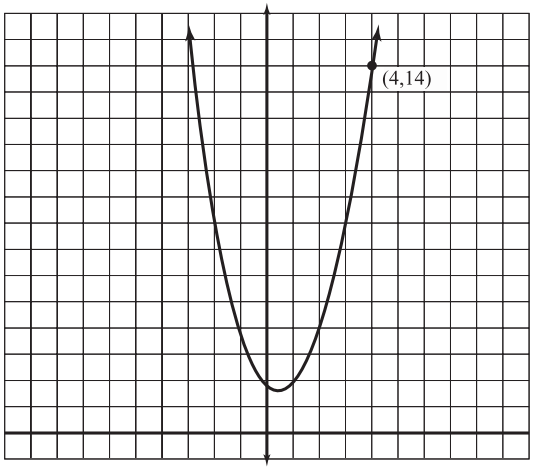


Figura 6.1

Use o gráfico de $y = x^2 - x + 2$ para verificar visualmente o limite em $x = 4$.

Você Tem Problemas

Problema 1: Avalie os limites a seguir usando substituição:

(a) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{x}$

(b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Método da Fatoração

Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$. Como você faria para encontrar o limite de f à medida que x se aproxima de –3? Bem, se você tentar usar a substituição para encontrar o limite, algo ruim pode acontecer:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(-3)^2 - 9}{-3 + 3}$$

$$= \frac{0}{0}$$

Que tipo de reposta é $\frac{0}{0}$? Uma resposta grosseira, com certeza. Lembre-se que não se pode ter 0 no denominador de uma fração; não é permitido. Então, o limite claramente não é $\frac{0}{0}$, mas essa resposta nos diz duas coisas:

1. Você deve usar um método diferente para achar o limite porque...
2. ... a função tende a apresentar uma quebra no valor de *x* que você substituiu na função.

A melhor alternativa à substituição é o método da fatoração, que funciona maravilhosamente bem nesse caso. No exemplo a seguir, vamos encontrar esse limite perturbador.

Exemplo 2: Avalie $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ pelo método da fatoração.

Solução: Para iniciar o método da fatoração, fatore! Faz sentido, já que o numerador é a diferença de quadrados perfeitos e é fatorado de bom grado:

$$\lim_{x \to -3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3}$$

Agora ambas as partes da fração contêm $(x + 3)$, então você pode cancelar esses termos para conseguir uma expressão de limite bem mais simples para:

$$\lim_{x \to -3} (x - 3)$$

Agora você pode usar o método da substituição para terminar:

$$-3 - 3 = -6$$

Então, $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Avalie estes limites pelo método da fatoração.

(a) $\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 7x - 15}{x - 5}$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Método da Conjugação

Se a substituição e a fatoração não funcionarem, você ainda terá uma última esperança, mas esse método final é muito limitado em seu escopo e potencial. Na verdade, é apenas útil para limites que contêm radicais, pois as potências vêm do uso da conjugação.

A *conjugação* de uma expressão binomial (por exemplo, uma expressão com dois termos) é a mesma expressão com o sinal do meio oposto. Por exemplo, a conjugação de $\sqrt{x}-5$ é $\sqrt{x}+5$.

definição

A **conjugação** de uma expressão binomial simplesmente muda o sinal entre os dois termos para o oposto. Por exemplo, $3+\sqrt{x}$ e $3-\sqrt{x}$ são conjugados.

O real potencial dos pares conjugados aparece quando você os multiplica. O produto de dois conjugados contendo radicais não contém expressões radicais! Em outras palavras, multiplicar por um conjugado pode eliminar raízes quadradas:

$$\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)=\sqrt{x^2}+5\sqrt{x}-5\sqrt{x}-25=x-25$$

Você deve usar o método da conjugação sempre que tiver um problema de limite contendo radicais para os quais a substituição não funciona – sempre tente a substituição primeiro! Porém, se a substituição resultar em um valor ilegal $\left(\text{como } \frac{0}{0}\right)$, você vai empregar o método conjugado, conforme faremos para resolver o próximo exemplo.

Exemplo 3: Avalie $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-4}{x-5}$.

Solução: Se você tentar o método da substituição, terá $\frac{0}{0}$, o que indica que você vai precisar de outro método para encontrar o limite, já que a função provavelmente tem uma quebra em $x = 5$. A função contém um radical e um número subtraído dele – a impressão digital de um problema que precisa do método da conjugação. Para começar, multiplique o numerador e o denominador pela conjugação da expressão radical $\left(\sqrt{x+11}+4\right)$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-4}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x+11}+4}{\sqrt{x+11}+4}$$

Multiplique os numeradores e denominadores como faria com qualquer par de binômios – por exemplo, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ – e todas as expressões radicais vão desaparecer do numerador. *Não multiplique o par não-conjugado*. Você verá por que em um segundo:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\left(x+11\right)+4\sqrt{x+11}-4\sqrt{x+11}-16}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x+11}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x+11-16}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x+11}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x+11}+4\right)}$$

Aqui está um ótimo truque: o numerador e o denominador agora contêm o mesmo termo ($x - 5$), então você pode cancelar o termo e terminar o problema com o método da substituição:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+11}+4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{16}+4}$$
$$= \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Avalie os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x+1}$

E Se Nada Funcionar?

Se nenhuma das técnicas que discutimos funcionar no problema que você tem em mãos, não perca a esperança. Não se esqueça que temos um método alternativo para determinar limites (mesmo sendo tedioso, mecânico e nada excitante – como a maioria dos programas de humor da televisão). Se todo o resto falhar, substitua um número incrivelmente próximo ao número que você está avaliando, como fizemos no Capítulo 5.

Deixe-me bancar o profeta por um momento. Para o efeito máximo, leia as próximas frases em voz alta, num tom soturno como se fosse um cartomante: "Vejo algo em seu futuro, sim, ao longe. O método prometido, um atalho, uma nova maneira de avaliar limites que torna fáceis as coisas difíceis. Vejo um nome francês... Règle de L'Hôpital... e também um número de sorte... 13. Capítulo 13. Veja o Capítulo 13."

Limites e Infinito

Existe uma relação muito estreita entre limites e infinito. No início, eles pensaram que eram apenas amigos, até que seus olhares se cruzaram e expressaram todos os seus sentimentos. Sem entrar em detalhes, agora eles são inseparáveis e, sem esse romance, eles não seriam assíntotas verticais nem horizontais.

Assíntotas Verticais

Você já sabe que não existe limite se uma função cresce ou decresce infinitamente, como em uma assíntota vertical. Talvez você esteja se perguntando se é possível determinar se uma função faz isso sem ter de desenhar um gráfico, e a resposta é sim! Assim como a substituição de resultado $\frac{0}{0}$ significa que existe uma quebra no gráfico, um resultado de $\frac{5}{0}$ indica uma assíntota vertical. Para ser mais específico, você não precisa ter 5 como numerador – qualquer número além de zero dividido por 0 indica que a função cresce ou decresce sem um destino, o que significa que não existe limite.

Exemplo 4: Em quais valores de *x* não existe limite para $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25}$?

Solução: Comece fatorando a expressão, pois saber quais valores de *x* resultam em 0 no denominador é importantíssimo:

$$f(x) = \frac{(x+5)(x+2)}{(x+5)(x-5)}$$

Em $x = -5$, a função deveria ter uma quebra, e substituir esse valor resulta em $\frac{0}{0}$. Você pode usar o método da fatoração para achar esse limite:

$$\lim_{x \to -5} f(x) = \frac{(-5+2)}{(-5-5)} = \frac{3}{10}$$

Porém, você precisa determinar onde *não existe* limite, então vamos dar uma olhada em outro valor de *x* perturbador: $x = 5$. Se você utilizá-lo em $f(x)$, você tem $\frac{70}{0}$. Esse resultado, qualquer número (além de 0) dividido por 0, indica uma assíntota vertical em $x = 5$, então $\lim_{x \to 5} f(x)$ não existe porque *f* pode tanto crescer como decrescer infinitamente.

Ponto Crítico

Uma vez que você determinou que $x = 5$ é uma assíntota vertical de $f(x)$ no exemplo 4, é simples determinar como a função reage com essa assíntota. (Em outras palavras, $f(x)$ cresce ou decresce sem destino à medida que você se aproxima de $x = 5$ a partir da direita e da esquerda?).

Tudo o que você precisa fazer é colocar um valor de *x um pouquinho* à direita de $x = 5$ em $f(x)$, como $x = 5{,}00001$. Você vai obter $f(5{,}00001) \approx 700.000$, o que indica que $f(x)$ está ficando enorme. Assim, $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \infty$. Da mesma forma, coloque um número *um pouco* à esquerda de $x = 5$, como $x = 4{,}99999$. Assim, f(4,99999) x -700.000, $\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$.

Se a substituição resultar em $\frac{0}{0}$, isso não *garante* que haja uma quebra na função. Você só pode ter certeza de que há uma quebra se houver um limite, como no caso de $x = -5$ nesse exemplo.

Você Tem Problemas

Problema 4: Determine os valores de x para os quais $g(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{2x^3 + 5x^2 - 3x}$ é indefinida. Se possível, avalie os limites à medida que x se aproxima de cada um desses valores.

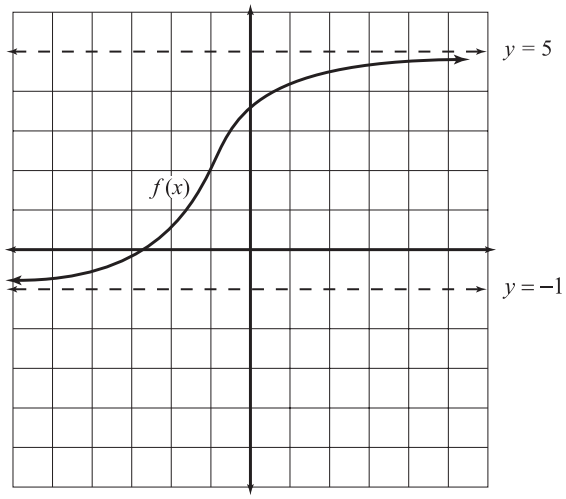
Assíntotas Horizontais

Assíntotas verticais são causadas por funções cujos valores crescem ou decrescem infinitamente à medida que tal função se aproxima de um valor de x fixo; então, se uma função tem uma assíntota vertical em $x = c$, podemos escrever $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ ou $-\infty$. Assíntotas *horizontais* têm muitos componentes iguais, mas é tudo ao contrário.

Uma assíntota horizontal é a altura que uma função tenta, mas não consegue alcançar à medida que os valores de x tornam-se infinitamente positivos ou negativos. Na Figura 6.2, $f(x)$ tende a 5 à medida que x se torna infinitamente positivo e a -1 à medida que $f(x)$ se torna infinitamente negativa.

Figura 6.2

O gráfico de $f(x)$ tem assíntotas horizontais diferentes à medida que x se torna infinitamente positivo e negativo. Uma função racional não será assim – ela terá (no máximo) uma assíntota horizontal.



Escreve-se da seguinte forma:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

Esses são chamados de limites *no* infinito, já que você não está aproximando um número fixo, como faz com limites típicos. No entanto, ainda existe limite porque

a função tende claramente a uma altura limite indicada pela assíntota horizontal, ainda que nunca seja alcançada.

Avaliar limites no infinito é um pouco diferente de avaliar limites comuns; a substituição, a fatoração e a conjugação não vão funcionar, então você precisa de um método alternativo. Embora o método de l'Hôpital funcione bem, você não vai aprendê-lo até o Capítulo 13. Nesse meio-tempo, você pode avaliar esses limites simplesmente comparando os expoentes maiores em seus numeradores e denominadores.

Digamos que vamos calcular $\lim_{x\to\infty} r(x)$, sendo que $r(x)$ é definida como uma fração cujo numerador, $n(x)$, e denominador, $d(x)$, são simplesmente polinômios. Compare os *graus* (expoentes maiores) de $n(x)$ e $d(x)$:

- Se o grau do numerador for mais alto, então $\lim_{x\to\infty} r(x) = \infty$ ou $-\infty$ (não há limite porque a função cresce ou decresce infinitamente).
- Se o grau do denominador for maior, então $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$.
- Se os graus forem iguais, então $\lim_{x\to\infty} r(x)$ é igual ao *coeficiente principal* de $n(x)$ dividido pelo coeficiente principal de $d(x)$.

Ponto Crítico

Se $r(x)$ é uma função racional (fracional) e tem uma assíntota horizontal, garante-se que $\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty} r(x)$. Em outras palavras, uma função racional tem a mesma assíntota horizontal nos dois extremos da função.

Essas orientações apenas se aplicam a limites no infinito; lembre-se sempre disso.

Exemplo 5: Avalie $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 7x + 4}{2 + x - 6x^2 + 8x^3}$.

Solução: Trata-se de um limite no infinito, então você deve comparar os graus do numerador e do denominador. Ambos são 3, então o limite é igual ao coeficiente principal do numerador (5) dividido pelo coeficiente principal do denominador (8), portanto $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 7x + 4}{2 + x - 6x^2 + 8x^3} = \frac{5}{8}$.

de•fi•ni•ção

O **grau** de um polinômio é o valor do expoente maior. O **coeficiente principal** de um polinômio é o coeficiente do termo com o expoente maior. Por exemplo, a expressão $y = 3x^2 - 5x^6 + 7$ tem grau 6 e coeficiente real -5.

Você Tem Problemas

Problema 5: Avalie os limites a seguir:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 6}{3x^2 - 4x + 1}$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^3 + 8x + 14}$

Teoremas Especiais de Limite

Os quatro limites especiais a seguir não são especiais porque te fazem sentir bem e leve por dentro. Com "especial" quero dizer que eles não podem ser avaliados pelos meios que discutimos até agora, mas você ainda os verá com frequência e talvez devesse memorizá-los, ainda que eles não cheirem bem. Agora que estamos na mesma página, aqui estão eles, sem mais delongas:

- $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$

Isso é apenas verdadeiro quando você se aproxima de 0, então não use essa fórmula em outras circunstâncias. O α pode ser qualquer valor.

- $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha} = 0$

Assim como o primeiro limite especial, isso é apenas verdadeiro quando se aproxima de 0. Às vezes, você também verá essa fórmula escrita como $\frac{1-\cos \alpha}{\alpha}$; e o limite é 0 de qualquer jeito.

- $\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0, \forall\ a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Se qualquer número real é dividido por x e fazemos com que x fique infinitamente maior, o resultado é 0. Pense nisso – faz todo o sentido. O que é 4 dividido por 900 zilhões? Sei lá, mas é definitivamente muito, muito pequeno. Tão pequeno que, na verdade, é basicamente 0.

- $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Isso significa que 1 mais um número extremamente baixo, quando elevado a uma potência extremamente mais alta, é exatamente igual ao número de Euler (2,71828...). Você vai ver isso muito pouco, mas é importante que você reconheça quando acontecer.

Exemplo 6: Avalie $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

Solução: Esta é a primeira fórmula de limite especial, mas note que o valor dentro do seno deve bater com o denominador para que a fórmula funcione; assim, precisamos de $3x$ no denominador em vez de apenas x. O truque é multiplicar em cima e em baixo por 3 (já que é a mesma coisa que multiplicar por 1, você não vai mudar o valor da expressão):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \cdot \frac{3}{3} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot 3$$

Você pode avaliar os limites dos fatores separadamente e multiplicar os resultados para chegar à resposta final:

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0} 3\right) = (1)(3) = 3$$

Você Tem Problemas

Problema 6: Avalie $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- A maioria dos limites pode ser avaliada por substituição, fatoração ou conjugação.
- Se uma função $f(x)$ tiver uma assíntota vertical $x = c$, então $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ ou $-\infty$.
- Se uma função racional $f(x)$ tiver uma assíntota horizontal $y = L$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.
- Há quatro limites comuns que desafiam as nossas técnicas e precisam ser memorizados.

Capítulo 7

Continuidade

Neste Capítulo

- O que significa continuidade
- Classificando continuidade
- Quando a descontinuidade é removível
- O Teorema do Valor Médio

Agora que você entende e pode avaliar limites, é hora de ir adiante com esse conhecimento. Se você folhear qualquer livro sobre cálculo e ler alguns dos mais importantes teoremas da área, quase todos terão uma condição muito significativa: a continuidade. Na verdade, quase nenhuma de nossas conclusões mais importantes em cálculo (inclusive o Teorema Fundamental do Cálculo, que soa megaimportante) funciona se as funções em questão não forem contínuas.

Testar a continuidade em uma função é muito similar a testar a existência de limites em uma função. Assim como três estipulações precisavam ser verificadas para que existisse limite em um determinado ponto (a existência de limites esquerdo e direito e que ambos fossem iguais), três estipulações devem ser atendidas para que uma função seja contínua em um ponto. Assim como havia três casos principais em que não existia limite, há três causas principais que fazem com que uma função seja descontínua.

Cálculo é muito conveniente assim – se você olhar com o cuidado necessário, pode realmente ver como um tópico flui naturalmente para o seguinte. Sem limites não haveria continuidade; sem continuidade não haveria derivadas; sem derivadas, nada de integrais; e sem integrais, nada de noites mal dormidas e em pânico tentando se preparar para a prova de cálculo.

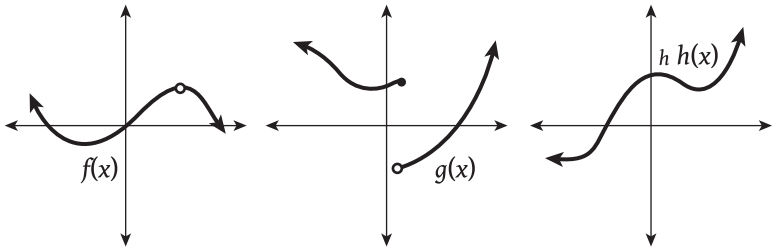
O que É Continuidade?

Primeiro de tudo, vamos estabelecer a linguagem. *Contínuo* é um adjetivo que descreve uma função que se encaixa em padrões muito específicos. Assim como os escoteiros precisam passar por pequenos testes para ganhar distintivos de mérito, uma função precisa se submeter a três testes em qualquer ponto para ganhar um distintivo de mérito de "contínua".

Antes de entrarmos na essência da definição matemática, vamos tomar uma perspectiva visual para continuidade. É mais fácil determinar se uma função é contínua olhando para o seu gráfico. *Se não houver "buracos", quebras ou "saltos", podemos nos assegurar de que ela é contínua*. Uma função contínua é apenas uma função agradável que pode ser desenhada por completo sem precisar levantar o lápis. Com essa definição intuitiva em mente, você consegue dizer qual das três funções é contínua na Figura 7.1?

Figura 7.1

Uma dessas coisas é diferente das outras; uma delas não pertence a esse grupo. Qual é a função contínua?



Ponto Crítico

Uma função contínua é como uma montanha-russa bem construída: sem falhas, buracos ou quebras, o que significa um passeio seguro para seus passageiros.

Das funções acima, apenas $h(x)$ pode ser traçada com um único golpe de caneta. As outras funções são muito mais imprevisíveis: f tem um buraco inesperado e g de repente se quebra sem aviso. Apenas a boa e velha h proporciona um agradável passeio suave do começo ao fim. A função h é como o namorado bom, maduro e confiável que você não teria vergonha de levar para a mamãe e o papai conhecerem, e o fato de isso garantir que não existirão "rompimentos" te traz paz e bem-estar emocional.

A Definição Matemática de Continuidade

A definição matemática de continuidade faz muito sentido se você mantiver uma coisa em mente: enquanto os limites nos dizem a que tende uma função, a continuidade garante que a função chegue lá. É como o ditado "de boas intenções o inferno está cheio". Continuidade representa o papel de um policial na matemática, determinando se a função foi fiel ou não às suas intenções (se ela é contínua ou descontínua). Com isso em mente, aqui está a definição oficial de continuidade:

Ponto Crítico

Uma função é contínua em um ponto se o limite e o valor da função forem iguais nesse ponto. Em outras palavras, existe limite se a altura à qual a função tende bater com a real altura da função.

Ponto Crítico

Muitas funções têm a garantia de ser contínuas em qualquer ponto de seu domínio, incluindo funções polinomiais, com raízes, exponenciais, logarítmicas, racionais e trigonométricas. A maioria das funções descontínuas que você vai encontrar será devido a pontos indefinidos em funções racionais e saltos devido a funções definidas por partes. Vamos discutir mais sobre as causas específicas da descontinuidade na próxima seção.

Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x = c$ se as três condições a seguir forem verdadeiras:

- $\lim_{x \to c} f(x)$ existe
- $f(c)$ é definida
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Em outras palavras, o limite existe em $x = c$ (o que significa que a função tende a uma altura); a função existe em $x = c$ (o que significa que não há um buraco); e o limite é igual ao valor da função (ou seja, o valor da função bate com o valor a que ela tende). Aliás, se uma função for contínua, você pode avaliar qualquer limite nela por meio do método da substituição, já que o valor da função em qualquer ponto será igual ao limite nesse determinado ponto.

Exemplo 1: Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+19}-4}{x+3}, & x \neq -3 \\ \dfrac{1}{8}, & x = -3 \end{cases}$$ é contínua em $x = -3$.

Solução: Para testar a continuidade, você deve encontrar o limite e o valor da função em $x = -3$ (e garantir que sejam iguais). É uma função bem feia. Como você determina a altura a que ela tende (limite) em $x = -3$? É claro que a regra empírica nessa função definida por partes governa o valor da função para cada x, exceto para $x = -3$. Quando você busca um limite, você quer ver a que altura tende à medida que se aproxima de $x = -3$, e não o valor realmente alcançado em $x = -3$, então, você vai encontrar o limite da maior e mais feia regra empírica de f. Use o método da conjugação.

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+19}-4}{x+3} \cdot \frac{\sqrt{x+19}+4}{\sqrt{x+19}+4}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x+19)-16}{(x+3)\left(\sqrt{x+19}+4\right)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{(x+3)\left(\sqrt{x+19}+4\right)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{1}{\sqrt{x+19}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

O limite existe quando $x = -3$ e é igual a $\frac{1}{8}$. A primeira condição da continuidade é atendida. Agora, vamos à segunda. De acordo com a definição das funções, você sabe que $f(-3) = \frac{1}{8}$, então a função existe nesse ponto. Assim, você pode concluir que a função é contínua em $x = -3$ porque o limite é igual ao valor da função nesse ponto.

Você Tem Problemas

Problema 1: Determine se a função $g(x)$, definida abaixo, é contínua em $x = 1$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x-1}, & x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$$

Tipos de Descontinuidade

Não acontece muita coisa na vida de um gráfico – ele vive em um domínio feliz, brincando de fazer pares de coordenadas. No entanto, há três coisas que podem ocorrer na extensão de uma função que o muda fundamentalmente, tornando-o descontínuo. Não é tão importante memorizar as principais causas da descontinuidade; em vez disso, reconheça exatamente as razões de uma função não atender aos requerimentos da continuidade.

Descontinuidade por Saltos

Uma *descontinuidade por saltos* é tipicamente causada por uma função definida por partes cujas partes não se encontram nitidamente, deixando espaços em branco no gráfico que são grandes o bastante para acomodar um elefante ou qualquer outro mamífero com presas. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Esse gráfico é formado por duas partes lineares, e a regra que governa a função muda quando $x = 0$. Dê uma olhada no gráfico de $f(x)$ na Figura 7.2.

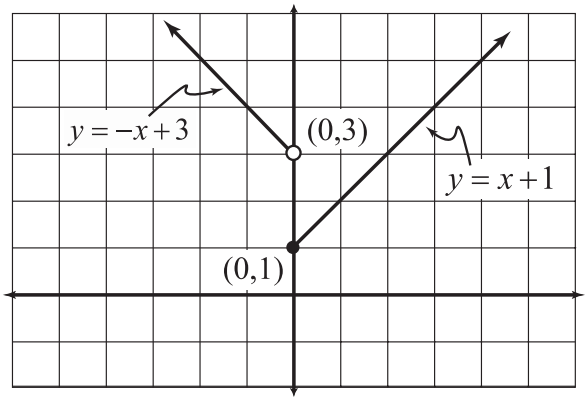


Figura 7.2

O gráfico de $f(x)$ exibe uma dupla personalidade já que é definido por uma função definida por partes.

Quando $x = 0$, o gráfico tem uma quebra trágica e disforme. Enquanto a parte esquerda tende a $y = 3$ à medida que você se aproxima de $x = 0$, a parte direita tende a $y = 1$ quando $x = 0$. Isso lhe parece familiar? Deveria: os limites esquerdo

de•fi•ni•ção

Uma **descontinuidade por saltos** ocorre quando não existe limite geral em um determinado valor de *x* (porque os limites direito e esquerdo existem, mas não são iguais).

e direito não são iguais em $x = 0$, então $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe. Isso torna a primeira regra da continuidade furada, resultando em *f* descontínua.

No próximo exemplo, você tem uma função definida por partes. Sua meta é protegê-la do mesmo destino da pobre função $f(x)$ acima escolhendo um valor para a constante c que garanta que as partes do gráfico se encontrem quando a regra da função mudar. Vai com fé!

Exemplo 2: Encontre o número real *c* que torna $g(x)$ *contínua em qualquer ponto* se:

$$g(x) = \begin{cases} x - 2, & x \le 3 \\ x^2 + c, & x > 3 \end{cases}$$

Solução: A regra empírica em $g(x)$ vai definir a função para qualquer número menor ou igual a 3, e seu reinado termina quando *x* alcança essa barreira. Nesse ponto, g terá alcançado a altura de $g(3) = 3 - 2 = 1$. Assim, a regra seguinte ($x^2 + c$) deve começar *exatamente* nessa altura quando $x = 3$, ainda que seja definido tecnicamente apenas em $x > 3$. Esta é a solução: ambas as partes devem chegar à mesma altura quando o gráfico de uma função definida por partes muda as regras. Então, sabemos que:

$$x^2 + c = 1$$

de•fi•ni•ção

Uma função é **contínua em qualquer ponto** se for contínua para cada valor de *x* em seu domínio. Como *g* no exemplo 2 é formado por uma parte linear e uma quadrática (ambas sempre contínuas enquanto polinômios), só pode haver descontinuidade em $x = 3$.

quando $x = 3$, então utilize esse valor de *x* e encontre *c:*

$$3^2 + c = 1$$
$$9 + c = 1$$
$$c = -8$$

Assim, a segunda parte de $g(x)$ deve ser $x^2 - 8$ para que $g(x)$ seja contínua. Você pode conferir a solução com o gráfico de $g(x)$ (como se observa na Figura 7.3) – não há descontinuidade por saltos em lugar algum.

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre o valor de *a* que torna a função $h(x)$ contínua em todos os pontos se:

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 7, & x < -1 \\ ax + 6, & x \ge -1 \end{cases}$$

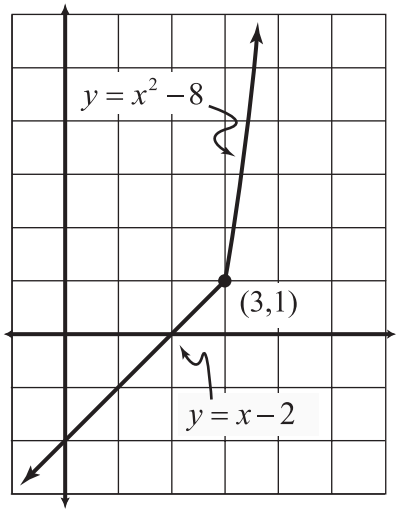


Figura 7.3

O gráfico de $g(x)$ é perfeito e contínuo agora – as partes do gráfico se juntam consistentemente.

Ponto de Descontinuidade

Um *ponto de descontinuidade* ocorre quando uma função tem um buraco. Pense assim: a função é descontínua apenas por causa daquele pontinho malvado, e vem daí o seu nome.

Considere a função $p(x) = \frac{x^2 + 11x + 28}{x + 4}$. É uma função racional, então é contínua em todos os pontos e domínios. Mas, espere aí... O valor de $x = -4$ definitivamente não está no domínio de $p(x)$ (veja o denominador), então $p(x)$ será automaticamente descontínua ali. A pergunta é: que tipo de descontinuidade temos aí?

de•fi•ni•ção

Um ponto de descontinuidade existe quando há um limite geral, mas o valor da função não é definido ali, o que quebra a segunda condição da continuidade.

É muito fácil classificar a descontinuidade nesse caso – tudo o que você precisa fazer é testar um limite nesse valor de x. Para calcular o limite, use o método da fatoração:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 11x + 28}{x + 4}$$

$$= \lim_{x \to -4} \frac{(x + 7)(x + 4)}{x + 4}$$

$$= \lim_{x \to -4} (x + 7) = -4 + 7 = 3$$

Ponto Crítico

Qualquer valor de x para o qual uma função é indefinida será automaticamente um ponto de descontinuidade para a função. Se existir limite nesse ponto de descontinuidade, então só pode ser um ponto de descontinuidade.

Para concluir, como $x = -4$ representa um lugar onde $p(x)$ é indefinida, e $\lim_{x \to -4} p(x) = 3$, você sabe que há um buraco na função $p(x)$ no ponto $(-4, 3)$ – um ponto de descontinuidade.

Descontinuidade Infinita/Essencial

Descontinuidade infinita (ou essencial) ocorre quando uma função não tem limite (porque cresce ou decresce sem destino) nem é definida em um determinado valor de x. Em outras palavras, esse tipo de descontinuidade ocorre primariamente em uma assíntota vertical.

definição

Uma **descontinuidade infinita** é causada por uma assíntota vertical. A partir do aumento ou diminuição da função sem limite, pode não haver nenhum limite e, desde que a função nunca realmente toque a assíntota, a função indefinida existe. Assim, a presença de uma assíntota vertical arruína todas as condições necessárias para a continuidade da ocorrência. As assíntotas verticais são as demolidoras do mundo da continuidade.

É fácil determinar que valores de x causam uma assíntota vertical se você ainda se lembrar do atalho do capítulo anterior: uma função cresce ou decresce infinitamente em um determinado valor de x se a substituição de x na expressão resultar em uma constante dividida por 0. Por outro lado, um resultado de $\frac{0}{0}$ *geralmente* quer dizer que esse ponto de descontinuidade está em ação. No entanto, como um resultado de $\frac{0}{0}$ não *garante* que você tenha um ponto de descontinuidade, você vai precisar checar novamente se o limite existe nesse ponto. Faremos isso no Exemplo 3, caso esteja confuso.

Em suma: se não existe limite geral, você tem uma descontinuidade por saltos; se existe limite, mas a função não o alcança, você tem um ponto de descontinuidade; se o limite não existe porque é ∞ ou $-\infty$, você tem uma descontinuidade infinita.

Agora que você tem um guia prático da descontinuidade, vamos dar uma olhada em um problema típico. Nele, pede-se que você identifique onde uma função é contínua ou, em vez disso, para destacar as áreas de descontinuidade e classificar os tipos.

Exemplo 3: Determine todos os valores de x para os quais a função

$$f(x) = \frac{9x^2 - 3x - 2}{3x^2 + 13x + 4}$$

é descontínua e classifique cada caso de descontinuidade.

Solução: Essa função é racional, então é seguramente contínua em todo o seu domínio; os únicos pontos que você precisa inspecionar são aqueles em que $f(x)$ é indefinida. Como $f(x)$ é racional, é indefinida quando seu denominador é igual a 0, e a forma mais fácil de encontrar essas localizações é fatorando $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(3x + 1)(3x - 2)}{(x + 4)(3x + 1)}$$

Iguale o denominador a 0 para ver que $x = -4$ e $x = -\frac{1}{3}$ serão pontos de descontinuidade. Agora, precisamos explicar que tipo de descontinuidades representam. Coloque cada um em $f(x)$. Se substituirmos $x = -4$, o resultado é $\frac{154}{0}$, o que indica uma assíntota vertical e uma descontinuidade infinita. No entanto, ao substituir $x = -\frac{1}{3}$ em f, obtemos $\frac{0}{0}$; isso significa que provavelmente existe um buraco da função nesse ponto. Mas isso não é o bastante. Você tem que *provar* que existe um buraco para concluir que $x = -\frac{1}{3}$ representa um ponto de descontinuidade. Você só precisa verificar a presença de um limite em $x = -\frac{1}{3}$. Para isso, use o método da fatoração:

$$\lim_{x \to -1/3} \frac{(3x+1)(3x-2)}{(x+4)(3x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1/3} \frac{3x-2}{x+4} = \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)-2}{-1/3+4} = \frac{-1-2}{11/3} = -\frac{9}{11}$$

Como existe limite, existe um ponto de descontinuidade quando $x = -\frac{1}{3}$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Determine todos os valores de x para os quais a função

$$g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 25}{x^2 - 25}$$

é descontínua e classifique cada caso de descontinuidade.

Descontinuidade Removível e Não-removível

Às vezes você pode encontrar uma função com descontinuidade removível e não-removível. Esses termos são mais específicos do que simplesmente o fato de atestar que uma função é descontínua, mas menos específicos do que os tipos de descontinuidade que exploramos na última seção.

Em outras palavras, esses termos são mais vagos do que ponto, saltos e infinito. Como eles aparecem com frequência, é bom saber o que significam. *Descontinuidade removível* pode ser eliminada simplesmente redefinindo um número finito de pontos. Ou seja, se você puder "arrumar" a descontinuidade preenchendo os intervalos, então ela é removível. Vamos voltar à função que examinamos no Exemplo 3:

$$f(x) = \frac{(3x+1)(3x-2)}{(x+4)(3x+1)}$$

Essa função tem um ponto de descontinuidade em $x = -\frac{1}{3}$, já que $\lim_{x \to -1/3} f(x) = -\frac{9}{11}$. Se redefinirmos *f(x)* levemente, com $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{11}$, o limite será o valor da função quando $x = -\frac{1}{3}$, e *f(x)* será contínua lá. Matematicamente, a nova função *f(x)* fica assim:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(3x+1)(3x-2)}{(x+4)(3x+1)}, & x \neq -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{9}{11}, & x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Na verdade você não precisa alterar a função para que ela tenha descontinuidade removível (aliás, se você alterasse a função, não seria descontínua quando $x = -\frac{1}{3}$). No entanto, se existir a *possibilidade* de mudar alguns pontos para preencher os intervalos da função, as descontinuidades são removíveis.

Descontinuidade não-removível ocorre quando uma função não tem limite geral em um determinado valor de *x*, como no caso de descontinuidades infinitas e por saltos. Não tem como redefinir um número finito de pontos para "arrumar" esse tipo de descontinuidade; a função é fundamentalmente descontínua nesse ponto e a reabilitação ou os medicamentos de controle de humor não podem torná-la apta a viver novamente em sociedade. É triste, mas nem mesmo um show de rock beneficente pode ajudar (o U2 que me desculpe). De volta à função *f*(*x*) do Exemplo 3 para ilustrar. Como há uma assíntota vertical em $x = -4$ e não existe limite geral aí, $x = -4$ é um caso de descontinuidade não-removível.

de•fi•ni•ção

Uma função tem **descontinuidade removível** em determinado valor de *x* quando existe limite, já que é possível redefini-la para preencher os buracos (e, portanto, remover a descontinuidade), se você quiser. Porém, ponto de descontinuidade e descontinuidade removível são essencialmente sinônimos. Uma função tem **descontinuidade não-removível** em determinado valor de *x* se não há limite geral, o que torna impossível a remoção da descontinuidade por redefinição de um número fixo de pontos. Descontinuidade de salto e infinita são exemplos de descontinuidade não-removível.

Teorema do Valor Intermediário

Pode comemorar! Chegamos ao nosso primeiro teorema oficial de cálculo.

O Teorema do Valor Intermediário: Se uma função $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, para cada número real d entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um c entre a e b de modo que $f(c) = d$.

Agora, deixe-me explicar o que afinal significa isso usando um exemplo simples. Como todo brasileiro forte e saudável, gosto demais das ceias de final de ano em dezembro. Se quiséssemos aumentar o meu ganho de peso (um pouco), o gráfico teria o título "Dias *versus* Peso", e vou chamá-lo de $w(x)$ na Figura 7.4.

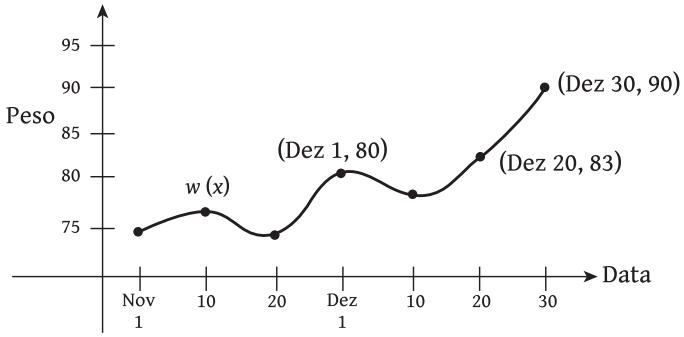


Figura 7.4

Gráfico "Dias *versus* Peso" do Kelley

No gráfico, podemos observar que eu pesava 80 kg no dia 1º de dezembro e inflei para 90 kg até o dia 30 de dezembro. Comparando isso ao Teorema do Valor Intermediário, a = 1º dez, b = 30 dez (valores estranhos, mas confie em mim dessa vez), $f(a) = w(1º \text{ dez}) = 80$ e $f(b) = w(30 \text{ dez}) = 90$. De acordo com o teorema, posso escolher qualquer valor entre 80 e 90 (por exemplo, 83) e garanto que algum dia dentre o período de 1º a 30 de dezembro eu realmente pesava tudo isso.

O teorema não tenta lhe dizer *onde* a sua função atinge tal valor ou *quantas vezes* isso acontece. Ele simplesmente diz (com uma voz calma e penetrante) que cada altura que uma função alcança em um determinado intervalo fechado de x será a imagem da função pelo menos uma vez em algum valor de x em tal intervalo. Como ele apenas garante a existência de algo, é chamado de teorema de existência.

Você Tem Problemas

Problema 4: Use o Teorema do Valor Intermediário para explicar por que a função $g(x) = x^2 + 3x - 6$ *precisa* de uma raiz (intercepto x) no intervalo fechado $[1,2]$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Uma função contínua não tem buraco, saltos ou quebras em seu gráfico.
- Se uma função atinge a altura a que ela tende em um dado valor de *x*, ela é contínua nesse ponto.
- Se uma função é indefinida, mas tem um limite em um determinado valor de *x*, existe um ponto de descontinuidade que é removível.
- Descontinuidade infinita é causada por uma assíntota vertical, enquanto descontinuidade por saltos é causada por uma quebra no gráfico da função; ambas são descontinuidades não-removíveis.
- O Teorema do Valor Médio utiliza uma linguagem complexa para garantir a totalidade e a completude de um gráfico.

Capítulo 8

O Quociente Diferencial

Neste Capítulo

- Criando uma tangente do princípio
- Como os limites podem calcular uma inclinação
- Com a secante você vai encontrar a linha tangente
- Duas versões do quociente diferencial

Embora os limites sejam importantes para o desenvolvimento do cálculo, e o único tópico que já discutimos até agora, eles estão prestes a ir para o banco de trás e dar lugar aos dois mais importantes tópicos que resumem o que a maioria das pessoas chama de "cálculo": derivadas e integrais. Seria muito cruel (e, na verdade, matematicamente impreciso) simplesmente começar a falar de derivadas sem descrever sua relação com os limites.

Prepare-se. Este capítulo descreve a solução para um dos dilemas matemáticos mais complicados de todos os tempos: como calcular a inclinação de uma linha tangente para uma função não-linear. Vamos usar os limites para preparar uma fórmula geral que vai lhe permitir encontrar a inclinação da tangente para uma função em qualquer ponto. O processo é um pouco tedioso e cansativo no que diz respeito à álgebra. Você pode se perguntar: "Vou sempre sofrer tanto para encontrar uma derivada?". A resposta é: não. No Capítulo 9, você vai aprender muitos atalhos para encontrar as derivadas.

Por enquanto, prepare-se para se surpreender. Você está prestes a criar uma linha tangente para uma função e calcular sua inclinação com uma simples "matemágica".

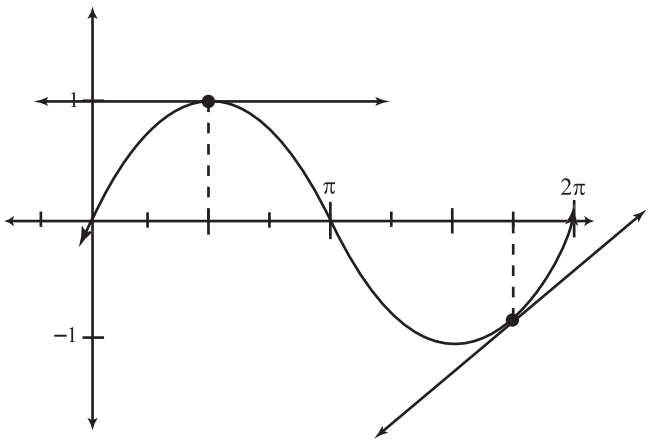
Quando uma Secante Se Torna uma Tangente

Antes de começarmos a calcular a inclinação de uma linha tangente, você deve provavelmente saber o que é uma *linha tangente.* É uma linha que simplesmente desliza ao longo da margem de uma curva, tocando-a no ponto que você quiser.

Na Figura 8.1, você verá o gráfico de y = sen x com duas de suas linhas tangentes desenhadas, uma em $x = \frac{\pi}{2}$ e outra em $x = \frac{7\pi}{4}$. Repare que as linhas tangentes simplesmente deslizam ao longo das margens do gráfico e, quando encostam, é apenas em um ponto, chamado *ponto de tangência*. Se estendê-la, a linha tangente pode encostar-se à função novamente em algum lugar do gráfico, mas isso não importa. O que interessa é que só uma vez ela chega relativamente perto do ponto de tangência.

Figura 8.1

Pontos de tangência.



Uma *linha secante*, por outro lado, corta a curva bruscamente, normalmente atingindo-a em pelo menos dois lugares. Na Figura 8.2, desenhei uma linha secante e tangente para uma função $f(x)$ quando x=3. Repare que a linha secante pontilhada não tem a mesma "delicadeza" da linha tangente, que se encontra com a função somente em x = 3.

Com um pequeno truque, vamos transformar a linha secante em uma tangente. Essa é a espinha dorsal do nosso procedimento para calcular a inclinação da linha tangente. Então, agora que você sabe o que as palavras significam, vamos começar.

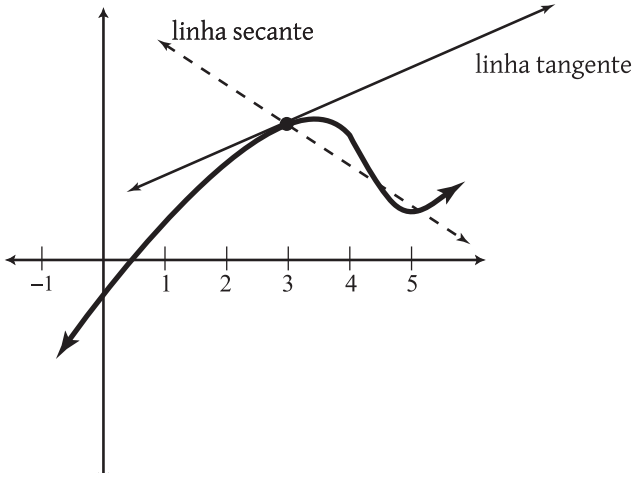


Figura 8.2

Uma linha secante e uma tangente para uma função $f(x)$ quando $x = 3$.

Querida, Encolhi o Δx

Dê uma olhada no gráfico da função na Figura 8.3, chamada $f(x)$. Marquei a localização $x = c$ no gráfico. Meu objetivo final será calcular a inclinação da linha tangente para f em $x = c$. Você pode não entender isso como um objetivo muito importante, mas confie em mim, é incrivelmente importante.

de•fi•ni•ção

Uma **linha tangente** desliza ao longo da curva, encostando nela somente uma vez na localização indicada; uma linha secante, porém, não tem essa delicadeza. Corta diretamente uma função, normalmente interceptando-a em múltiplos pontos.

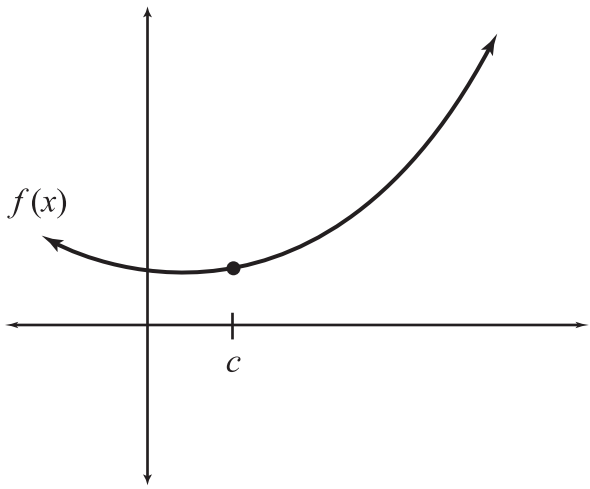


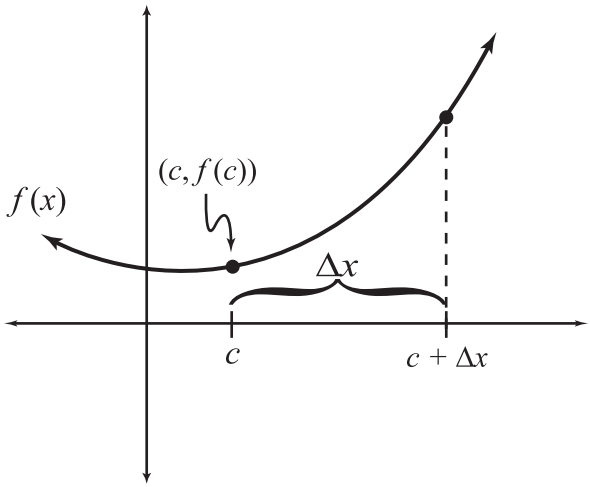
Figura 8.3

O gráfico de alguma função $f(x)$ com localização $x = c$.

Agora, vamos adicionar algumas coisas ao gráfico para criar a Figura 8.4. Primeiramente, eu conheço as coordenadas do ponto indicado. Para se atingir esse ponto a partir da origem, tenho que ir *c* unidades à direita e *f*(*c*) unidades para cima (para que eu consiga encostar na função), o que se traduz no par de coordenadas (*c*,*f* (*c*)). Agora, vamos adicionar outro ponto ao gráfico à direita do ponto *x* = c. Exatamente quanto à direita, você me pergunta? Vamos ser genéricos e dizer "Δ*x*" à direita. ("Δ*x*" é a linguagem matemática para "a variação em *x*"; e já que estamos mudando o valor *x* de *c* indo Δ*x* mais à direita, é um nome apropriado.)

Figura 8.4

Agora aparecendo no gráfico de *f*(*x*) um novo valor de *x*, que é a distância de Δ*x* + *c*.



Mais uma vez, tudo o que estamos fazendo é um novo ponto, que se refere à distância horizontal de Δ*x* a partir do primeiro ponto. Você consegue descobrir as coordenadas do novo ponto? Da mesma forma como conseguimos que o primeiro par de coordenadas fosse (*c*,*f* (*c*)), este ponto tem coordenadas (*c*+Δ*x*, *f* (*c* + Δ*x*)). Agora, conecte os dois pontos, e o que temos? Uma linha secante cortando o *f*, como demonstrado na Figura 8.5.

É verdade, nosso objetivo principal é encontrar a inclinação da linha *tangente* para *f* em *x* = *c*, mas por enquanto vamos nos divertir encontrando a inclinação da linha *secante* que desenhamos em *x* = *c*. Sabemos como calcular a inclinação de uma linha quando dois pontos são dados – use o mesmo procedimento do Problema 3 do Capítulo 2.

$$\begin{aligned}\text{inclinação} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f\left(c + \Delta x\right) - f\left(c\right)}{\left(c + \Delta x\right) - c} \\ &= \frac{f\left(c + \Delta x\right) - f\left(c\right)}{\Delta x}\end{aligned}$$

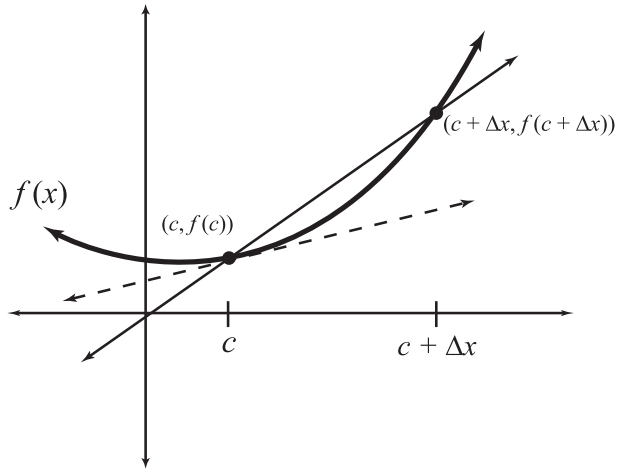


Figura 8.5

Adicionamos as coordenadas ao novo ponto. Repare que a linha secante ligando os pontos se parece um pouco com a linha tangente pontilhada em $x = c$. É um pouco íngreme demais, mas é bem parecida.

Então, encontramos a inclinação da linha secante, e essa inclinação é relativamente próxima à da linha tangente que queremos encontrar – ambas têm quase a mesma inclinação. Entretanto, não queremos somente uma aproximação da inclinação da linha tangente, queremos conhecê-la *exatamente*. Eis o ponto-chave: vou redesenhar o segundo ponto no gráfico de f (lembre-se daquele que estava a Δx de distância do primeiro ponto) e, dessa vez, tornar o Δx menor. A Figura 8.6 mostra o novo e melhorado ponto da linha secante. Por que "melhorado"? Porque tem uma inclinação mais próxima à da linha tangente que estamos procurando.

Ponto Crítico

Aqui vem a conexão com os limites: quanto menor eu fizer Δx, mais próxima a inclinação da linha secante será da inclinação da linha tangente. Não posso fazer $\Delta x = 0$ porque isso significaria dividir por 0 na equação que criamos agora há pouco.

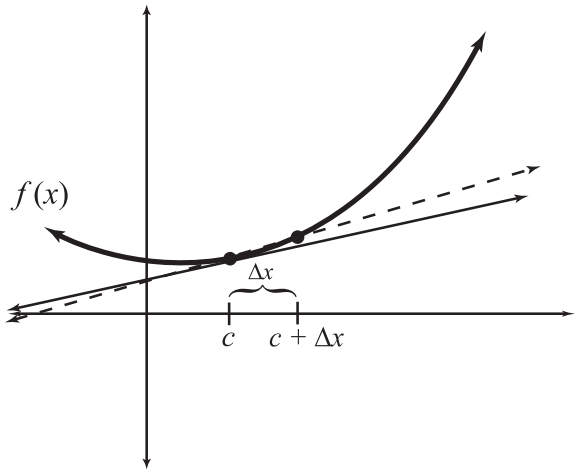


Figura 8.6

Quando Δx é menor, o novo ponto é mais próximo de $x = c$. Além disso, a linha secante (sólida) parece ainda mais com a linha tangente (pontilhada).

Essa nova linha secante não é tão íngreme quando a anterior, e parece ainda mais a verdadeira linha tangente em $x = c$. O engraçado é que, se calcularmos a inclinação, seria exatamente igual àquela que mencionei anteriormente: $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Eis o meu momento de brilhar: se eu fizesse Δx infinitamente pequeno, tão pequeno que chegasse quase (mas não exatamente) a 0, então os dois pontos no gráfico seriam tão próximos que eu teria, consequentemente, a linha tangente. Assim, calculando a inclinação da linha secante, eu estaria calculando também a inclinação da linha tangente. Como faço para Δx ser tão pequeno, então? É fácil, na verdade, desde que você saiba algo sobre limites. Vamos simplesmente encontrar a função da inclinação da secante enquanto Δx *se aproxima* de 0. Esse limite é chamado de *quociente diferencial*, e é a própria definição da *derivada*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Ponto Crítico

A fórmula é chamada de quociente diferencial porque (1) ela representa um quociente uma vez que é uma fração, e (2) o numerador e o denominador representam a diferença nos *y* e nos *x*, respectivamente, entre os dois pontos na nossa linha secante.

Este é o resultado mais importante do cálculo que discutimos até agora. Agora temos uma fórmula realmente feia, mas muito funcional, que nos permite calcular a inclinação da linha tangente para uma função. O que impressiona é que nós forçamos essa situação, não é? Nós criamos uma linha tangente do nada, e forçamos a linha secante a mudanças radicais. Mas, se você for como eu, deve estar pensando: "Chega de teoria – eu provavelmente nunca terei de criar uma definição para uma derivada. Em vez disso, gostaria de aprender a usar o quociente diferencial para encontrar uma derivada". Seu desejo é uma ordem.

de•fi•ni•ção

A **derivada** de uma função $f(x)$ em $x = c$ é a inclinação da linha tangente a f em $x = c$. Você pode encontrar o valor da derivada usando o **quociente diferencial**, que é esta fórmula:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como você pode ver, eu normalmente escrevo a fórmula com "x" em vez de "c", mas isso não muda a maneira como ela funciona.

Aplicando o Quociente Diferencial

Para encontrar a derivada $f'(x)$ da função $f(x)$, você vai aplicar a fórmula do quociente diferencial. Para chegar ao numerador, insira $(x + \Delta x)$ em f e, então, subtraia a função original $f(x)$. Depois, divida esta quantidade por Δx e calcule o limite da fração inteira, enquanto Δx se aproxima de 0.

Alerta do Kelley

Os erros mais comuns que as pessoas cometem ao aplicar o quociente diferencial são (1) esquecer de subtrair $f(x)$ no numerador e (2) omitir o denominador completamente. Algumas vezes avaliar $f(x + \Delta x)$ torna-se tão tedioso que elas esquecem o restante da fórmula.

Exemplo 1: Use o quociente diferencial para encontrar a derivada de $f(x) = x^2 - 3x + 4$, e então analise $f'(2)$.

Solução: O quociente diferencial tem somente uma parte "feia" no numerador: $f(x + \Delta x)$, então, vamos descobrir o que está adiantado e inserir na fórmula. Lembre-se de que, ao analisar $f(x + \Delta x)$, terá de inserir $x + \Delta x$ em todos os termos "x". Em outras palavras, insira em x^2 *e* $-3x$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 4$$

Essa quantidade toda deve ser substituída no quociente diferencial por $f(x + \Delta x)$, e vamos tentar simplificar o máximo possível:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 4\right) - \left(x^2 - 3x + 4\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x + 3x - 3\Delta x + 4 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

Ponto Crítico

Pode haver muitas notações que indicam a derivada. As mais comuns são $f'(x)$, y' e $\frac{dy}{dx}$.

As duas últimas são mais usadas quando a função original é escrita na forma de "y" em vez de na forma "$f(x)$". A segunda derivada (a derivada da primeira derivada) é denotada $f''(x)$, y'', e $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Você tem de admitir – isso está muito melhor do que estava há um segundo. Você estava começando a entrar em pânico, não estava? Todos esses problemas de quociente diferencial serão muito simplificados dessa forma. Agora, como avaliamos o limite? Não pode ser com substituição, porque resulta em $\frac{0}{0}$, então, devemos seguir para a próxima técnica disponível: a fatoração. Funciona direitinho:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(2x + \Delta x - 3\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x - 3\right) = 2x + 0 - 3$$

$$f'\left(x\right) = 2x - 3$$

Agora, para a segunda parte do problema: calcular $f'(2)$, a inclinação da linha tangente quando $x = 2$. É tão fácil quanto inserir $x = 2$ na nova fórmula da derivada:

$$f'\left(x\right) = 2x - 3$$

$$f'\left(2\right) = 2\left(2\right) - 3 = 1$$

Ao encontrar a derivada geral usando o quociente diferencial ($f'(x) = 2x - 3$), você pode então calcular qualquer derivada que desejar (como $f'(2)$). Entretanto, encontrar a derivada geral não é muito divertido. Na verdade, é tão divertido quanto a época em que você só ganhava meias e cuecas de aniversário. O cálculo oferece uma alternativa do quociente diferencial se você sentir um ódio por esse método crescendo dentro de você.

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre a derivada de $g(x) = 5x^2 + 7x - 6$ e use-a para calcular $g'(-1)$.

O Quociente Diferencial Alternativo

Tenho uma boa e uma má notícia para você. Primeiro, a boa: o quociente diferencial alternativo envolve muito menos álgebra e nenhum Δx. Mas a má notícia é que ele não encontra a derivada geral – você só pode calcular valores específicos da derivada. Em outras palavras, você poderá usar esse método para encontrar valores como $f'(3)$, mas você não vai conseguir encontrar a derivada $f'(x)$. Isso definitivamente limita sua utilidade, mas é, sem dúvida, muito mais rápido que o primeiro método.

O quociente diferencial alternativo: A derivada de *f* no valor específico de *x*, *x* = *c*, pode ser encontrada na fórmula:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Perceba as principais diferenças entre esse quociente e o anterior. Para começar, neste limite você se aproxima do número *c,* não do *x*, onde você encontra a derivada; no outro método, Δ*x* sempre se aproxima de 0. No numerador dessa fórmula, você vai calcular *f*(*c*), que será um número real; na fórmula anterior, ambas as partes do numerador, *f*(*x* + Δ*x*) e *f*(*x*), eram funções de *x*. Claramente, as duas fórmulas têm denominadores diferentes também. Já que ambos são limites, analisá-los é muito parecido, uma vez que você tenha inserido os valores iniciais.

Por diversão, vamos refazer a segunda parte do Exemplo 1, já que sabemos a resposta certa. Já reparou que os professores de matemática *adoram* fazer isso – refazer o mesmo problema duas vezes usando métodos diferentes e chegando à mesma resposta como se fosse mágica? Eu lembro de fazer isso em aula, voltando à conclusão do segundo problema e dizendo: "Vocês vão ver, eles são iguais!". Nem preciso dizer, eu era único a ficar impressionado. Entretanto, ainda faço isso, esperando ansiosamente que, um dia, um aluno desmaie de choque e alegria pelo fato de as respostas serem iguais.

Exemplo 2: Encontre *f*'(2) se $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Solução: A fórmula requer que saibamos *f*(*c*), nesse caso, *f*(2), então, calcule isso antes:

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 4 - 6 + 4 = 2$$

Agora, insira no quociente diferencial alternativo, e você ficará muito surpreso ao ver como é mais simples do que parece ser no Exemplo 1:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 - 3x + 4\right) - (2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

Para concluir, encontre o limite usando o método da fatoração:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \to 2} (x-1) = 1$$

Como mágica (embora eu tenha a certeza de que você não está impressionado), temos a mesma resposta de antes. *Voilá!*

Você Tem Problemas

Problema 2: Calcule a derivada de $h(x) = \sqrt{x+1}$ quando $x = 8$ usando o quociente diferencial alternativo.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- A inclinação da linha tangente à curva, em certo ponto, é chamada de derivada naquele ponto.
- Há duas formas para o quociente diferencial; ambos dão valor à derivada de uma função em qualquer valor de *x*.
- A forma original do quociente diferencial pode fornecer a fórmula da derivada geral para uma função, enquanto a segunda só pode dar o valor da derivada com um valor específico de *x*.

Parte 3

A Derivada

No final da Parte 2, você aprendeu o básico do quociente diferencial e que ele calcula uma coisa chamada derivada. No estudo do cálculo, a derivada é algo *enorme*. Tudo o que você for fazer daqui para a frente vai envolver as derivadas em algum nível. Por isso, é importante saber o que elas são exatamente, quando existem e não existem, e como encontrá-las em funções.

Uma vez que tenha absorvido as habilidades básicas, você pode começar a explorar a enorme floresta de aplicações que vem com o pacote das derivadas. Como as derivadas são, na verdade, taxas de variação, elas classificam e descrevem funções de maneiras que você nem acredita! Você alguma vez já se perguntou: "Qual é a área máxima que posso cercar com uma cerca retangular se um lado do retângulo for três vezes maior do que o dobro do outro lado?". Se sim, bem, você me assusta, pois nenhuma pessoa normal tem pensamentos assim. Mas a boa notícia é que você vai encontrar a resposta de uma vez por todas.

Capítulo 9

Entendendo as Leis das Derivadas

Neste Capítulo

- Quando encontramos uma derivada?
- Calculando taxas de variação
- Técnicas de derivada simples (ou ordinária)
- Derivadas de funções trigonométricas
- Derivadas múltiplas

Um dos meus professores universitários mais memoráveis foi um coreano muito gentil chamado Sr. Oh. Uma das razões de suas aulas terem me marcado tanto era a maneira como ele conseguia ilustrar as coisas com imagens bizarras, mas intensas. No dia em que discutimos o Teorema Fundamental do Cálculo pela primeira vez, ele descreveu deste jeito nada usual: "A aula de hoje é como o dia em que o mundo foi criado. Ontem, nada de interessante. Hoje, interessante!"

Uma das aulas do Sr. Oh que ficaram mais marcadas foi a de equações diferenciais. Ele sempre pegava no pé da jovem que se sentava perto de mim porque ela sempre fazia as coisas do jeito mais difícil. Não importava os atalhos que aprendíamos, ela não os usava. Nunca entendi o porquê, e ela explicou para mim: "É assim que eu faço as coisas... não consigo mudar isso agora!". Lembro do Sr. Oh perguntando para ela: "Se você quiser batatas, você compra uma fazenda, ara a terra, planta a

semente, cultiva as plantas e então colhe as batatas? Se eu fosse você, apenas iria ao supermercado."

No mundo das derivadas, o quociente diferencial equivale a cultivar as suas batatas. É claro que o processo funciona, mas eu lhe dei vários exemplos específicos para que isso funcionasse para você sem problemas ou dores no peito. Eu estava protegendo você do tempo ruim das derivadas complicadas que estavam por vir. No entanto, preciso deixar você crescer algum dia e encarar a cara feia de uma derivada complicada. A boa notícia é que você pode encontrar as soluções no supermercado...

Quando Existe uma Derivada?

Antes de sair por aí tropeçando em derivadas, você deve saber que há três casos específicos em que a derivada de uma função não existe. Mesmo que você pegue uma resposta numérica para calcular a derivada, é possível que a resposta seja inválida porque, na verdade, não há derivada! Seja cuidadoso se o gráfico da sua função contiver qualquer uma das coisas a seguir:

Ponto Crítico

Você vai ouvir a seguinte frase em sua aula de cálculo: "diferenciabilidade implica continuidade". Ela significa exatamente isto: se uma função tem uma derivada em um valor de *x* específico, ela também tem de ser contínua nesse valor. Essa afirmação é o equivalente lógico de dizer "se uma função não é contínua em determinada localização, também não é diferenciável".

Descontinuidade

Não existe derivada em um ponto de descontinuidade. Não importa se a descontinuidade é removível ou não. Quando uma função é descontínua em um determinado valor de *x*, não pode haver uma derivada ali. Por exemplo, se você tiver a função...

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-6)}$$

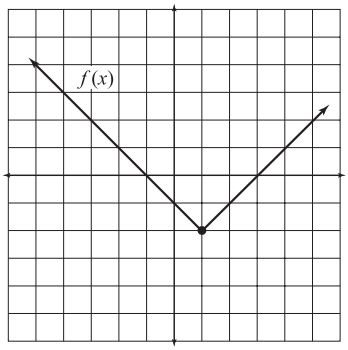
...você sabe que *f* não tem derivada em $x = -2$ e $x = -6$. Em outras palavras, *f* não é *diferenciável* nesses valores de *x*.

Vértice no Gráfico

Se um gráfico tiver um vértice, a função não tem derivada nessa localização. Poucas funções têm vértice; aliás, elas são bem raras. É mais provável que você veja vértices em funções com valores absolutos ou em funções definidas por partes cujas partes se encontram. Na Figura 9.1 você vai encontrar os gráficos da função $f(x)=|x-1|-2$ e uma função definida por partes...

$$g(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ x, x>1\end{cases}$$

... sendo que ambas têm vértice em $x = 1$.



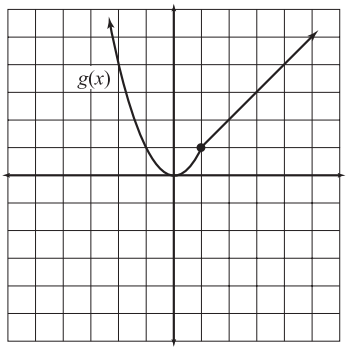


Figura 9.1

Ambos os gráficos são pontudos em $x = 1$ e, por isso, não-diferenciáveis nessa localização.

Alerta do Kelley

Muitas calculadoras modernas podem avaliar derivadas, mas elas podem fornecer valores incorretos se você estiver tentando encontrar a derivada de um vértice. Por exemplo, se você diferenciar $h(x) = |x|$, muitas calculadoras vão lhe dizer que $h'(0) = 0$, mas nós sabemos que o vértice de $h(x)$ fica em $x = 0$. Então não tem derivada de jeito nenhum! Assim, aceite qualquer resposta que sua calculadora lhe der com certa reserva; ela espera que você saiba que está lhe pedindo uma tarefa impossível.

Tangente Vertical

Lembre-se de que a derivada é definida como a inclinação da linha tangente. E se a tangente for vertical? Lembre-se de que linhas verticais não têm inclinação, então não pode existir uma derivada. É muito difícil identificar quando isso acontece usando apenas um gráfico, mas, felizmente, a matemática das derivadas mostra claramente quando isso acontece, como podemos ver no exemplo a seguir.

de•fi•ni•ção

Uma função é **diferenciável** em um determinado valor de x se você puder obter a derivada da função nesse valor de x. Ou seja, $f(x)$ é diferenciável em $x = c$ se existe $f'(c)$. Diz-se que uma função cuja derivada não existe em um valor específico de x é **não-diferenciável** nessa localização.

Exemplo 1: Mostre que não existe derivada para a função $f(x) = x^{1/3}$ quando $x = 0$.

Solução: Você não sabe como encontrar a derivada de $f(x) = x^{1/3}$ (mas vai conseguir em breve), então eu digo que $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$. Se você tentar avaliar $f(0)$, terá:

$$f'(0) = \frac{1}{3(0)^{2/3}} = \frac{1}{0}$$

A inclinação da linha tangente é um número inexistente, já que não se pode dividir por 0.

Técnicas de Derivadas Básicas

Aprender como encontrar derivadas usando o quociente diferencial pode ser um trabalho demorado e tedioso. Mas quando você dominar o assunto, terá pagado as suas dívidas, por assim dizer. Agora você vai aprender algumas técnicas muito úteis. Apresento-lhe três atalhos para derivadas que tornarão as coisas bem mais rápidas e fáceis.

A Regra da Potência

Ainda que a regra da potência somente encontre derivadas básicas, você definitivamente irá usá-la muito mais do que as outras que vai aprender. Na verdade, ela sempre aparece nas últimas etapas de outras regras, mas não vamos nos precipitar. Qualquer termo na forma ax^n pode ser diferenciado pela regra da potência.

Regra da potência: A derivada do termo ax^n (em relação a x), onde a e n são números reais, é $(a \cdot n)x^{n-1}$.

Ponto Crítico

Não se preocupe com a frase "em relação a x" na definição da regra da potência. Como x é a única variável da expressão, realmente não precisamos dizer isso. No Capítulo 10 vamos diferenciar ***implicitamente***, e então você terá mesmo que saber o que significa. Por enquanto, apenas entenda que a frase "em relação a x" se refere à variável do problema, mas que não afeta as técnicas de derivada.

Estes são os passos que você vai dar para encontrar a derivada por meio da regra da potência:

1. Multiplique o coeficiente pelo expoente da variável. Se não houver coeficiente – isto é, se o coeficiente for igual a 1 – o expoente vira o novo coeficiente.
2. Subtraia 1 do expoente.

Alguns exemplos vão iluminar a questão para você.

Exemplo 2: Use a regra da potência para encontrar a derivada de $f(h) = \frac{4}{3}h^3 + 6h - 5$.

Solução: Ainda que haja alguns termos aqui, você pode encontrar a derivada de cada um deles separadamente com a regra da potência. Antes de começar, vou lhe contar que a derivada do termo constante (-5) é 0. (Veja abaixo para entender.) Para os demais termos, multiplique cada coeficiente pelo expoente e subtraia 1 do expoente.

$$f'(h) = \left(\frac{4}{3} \cdot 3\right) h^{3-1} + (6 \cdot 1) h^{1-1} - 0$$

$$= 4h^2 + 6h^0$$

$$= 4h^2 + 6$$

Lembre-se: entende-se que o expoente de $6h$ seja 1, já que não é escrito de forma explícita, e uma variável elevada à potência 0 é igual a 1: $6h^0 = 6 \cdot 1 = 6$.

A derivada de qualquer constante é 0. Se estiver interessado, aí vai uma explicação rápida. Considere a função constante $g(x) = 7$. Se você quisesse, poderia escrever essa função com um termo variável: $g(x) = 7x^0$. Não estou mudando o valor da função, já que uma variável elevada a 0 é igual a 1, e $7 \cdot 1 = 7$. Agora que você reescreveu a função, use a regra da potência:

$$g(x) = 7x^0$$

$$g'(x) = (7 \cdot 0) x^{0-1}$$

$$= 0x^{-1} = 0$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre as derivadas por meio da regra da potência:

(a) $y = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[5]{x}$

A Regra do Produto

Se uma função tiver duas expressões variáveis multiplicadas, você não pode simplesmente encontrar a derivada de cada uma e multiplicar o resultado. Por exemplo, a derivada de $x^2(x^3 - 3)$ *não* é $(2x)(3x^2)$. Em vez disso, você precisa usar uma fórmula muito simples que, aliás, deveria memorizar.

A regra do produto: Se a função $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ for o produto de duas funções diferenciáveis $f(x)$ e $g(x)$, então

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Alerta do Kelley

Negligenciar a regra do produto é um erro comum em cálculo. Lembre-se: Se duas expressões variáveis são multiplicadas uma pela outra, você tem que usar a regra do produto. Porém, se você quiser encontrar a derivada de $5 \cdot 7x^2$, não precisará dela (já que 5 não é uma expressão variável). Em vez disso, você pode reescrever como $35x^2$ e usar a regra da potência para chegar à derivada correta de $70x$.

Isso quer dizer que se uma função é criada ao se multiplicar duas outras funções uma pela outra, a derivada da função resultante é a primeira *vezes* a derivada da segunda *mais* a segunda *vezes* a derivada da primeira.

Exemplo 3: Diferencie $f(x) = (x^2 + 6)(2x - 5)$ usando (1) a regra do produto e (2) a regra da potência. Mostre que os resultados são iguais. *Dica*: para usar a regra da potência, você precisa primeiro multiplicar os termos juntos.

Solução: (1) De acordo com a regra do produto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 + 6\right)(2) + (2x)(2x - 5) \\ &= 2x^2 + 12 + 4x^2 - 10x \\ &= 6x^2 - 10x + 12 \end{aligned}$$

(2) Como diz a "dica", você deve multiplicar os binômios antes de aplicar a regra da potência: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12x - 30$. Agora, use a regra da potência para chegar a $f'(x) = 6x^2 - 10x + 12$, que bate com a resposta da parte (1).

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre a derivada de $g(x) = (2x - 1)(x + 4)$ usando (1) a regra da potência e (2) a regra do produto. Mostre que os resultados são iguais.

A Regra do Quociente

Assim como a regra do produto evita que você encontre derivadas individuais quando você está multiplicando, a regra do quociente faz o mesmo, mas com a divisão. Todo ano em minha primeira prova sobre derivadas, um dos problemas é encontrar a derivada de algo como $\frac{x^2 + 7x}{3x^3 + 2x + 4}$, e metade dos meus alunos sempre responde $\frac{2x + 7}{9x^2 + 2}$, não importa quantas vezes eu lhes diga para usar a regra do quociente. Você *tem que* usar a regra do quociente sempre que duas expressões variáveis forem divididas.

A regra do quociente: Se $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis, então $h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$, sendo $g(x) \neq 0$.

Ou seja, para achar a derivada de uma fração, pegue a função de baixo *vezes* a derivada da função de cima e *subtraia* a de cima *vezes* a derivada da de baixo; divida tudo isso pela função de baixo ao quadrado. Quando digo "cima" e "baixo" quero dizer numerador e denominador, claro.

Alerta do Kelley

É muito importante ter a ordem correta da subtração no numerador da regra do quociente. Enquanto na regra do produto qualquer uma das duas funções poderia ser *f* ou *g*, na regra do quociente *g* tem de ser necessariamente o denominador da função.

Exemplo 4: Encontre a derivada de $y = \frac{3x+7}{x^2-1}$ usando a regra do quociente.

Solução: O numerador é $f(x)$ na regra do quociente, e o denominador é $g(x)$: $f(x) = 3x + 7$ e $g(x) = x^2 - 1$. Assim, $f'(x) = 3$ e $g'(x) = 2x$. Coloque todos esses valores em seus devidos lugares na regra do quociente:

$$y' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$y' = \frac{\left(x^2-1\right)\cdot 3 - \left(3x+7\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3 - 6x^2 - 14x}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$= \frac{-3x^2 - 14x - 3}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Use a regra do quociente para diferenciar $f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 7x}{x - 5}$ e simplifique $f'(x)$.

A Regra da Cadeia

Considere por um momento as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 3x + 1$. Com as habilidades que adquiriu, você poderia encontrar a derivada de cada uma delas usando a regra da potência. Poderia até mesmo encontrar as derivadas do produto $f(x)\cdot g(x)$ ou do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ delas usando as regras do produto e do quociente, respectivamente (sem grandes surpresas até aqui).

No entanto, você não sabe como encontrar a derivada de duas funções, uma dentro da (ou "composta com") outra. Em outras palavras, a derivada de

$f\left(g\left(x\right)\right)=\sqrt{3x+1}$ requer uma técnica que você ainda não aprendeu, chamada regra da cadeia.

Se esta função fosse mais simples, como $y=\sqrt{x}$, não haveria necessidade da regra da cadeia, mas a função interna (neste caso 3*x* + 1) é muito complicada. Aí vai uma boa receita de bolo: se uma função contiver algo além de uma única variável, como *x*, você deve usar a regra da cadeia para achar a sua derivada.

A regra da cadeia: Dada a função composta $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis,

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ponto Crítico

As derivadas de equações logarítmicas e exponenciais usam a regra da cadeia assiduamente. Aprenda esses padrões:

- $\frac{d}{dx}\left(\log_a f(x)\right)=\frac{1}{\left(\ln a\right)f(x)}\cdot f'(x)$
- $\frac{d}{dx}\left(a^{f(x)}\right)=\left(\ln a\right)a^{f(x)}\cdot f'(x)$

Há casos especiais para as funções logarítmica natural (ln *x*) e exponencial natural (e^x), então você vai encontrar com mais frequência: $\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)=\frac{1}{x}$ e $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$.

Ou seja, para determinar a derivada de uma expressão em que uma função está "presa" dentro de uma outra, você deve seguir os seguintes passos:

1. Descubra a derivada da função "de fora", isolando a função "de dentro".
2. Multiplique o resultado pela derivada da função "interna".

Exemplo 5: Use a regra da cadeia para encontrar a derivada de $y=\sqrt{3x+1}$.

Solução: Reescreva a função para que fique claro o que foi composto com o quê. Neste caso, 3*x* + 1 é colocado em $\sqrt{x}$. Ou seja, se $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ (a função "externa") e $g(x) = 3x + 1$ (a função "interna", já que está presa dentro da raiz quadrada em $f(x)$), então $f\left(g\left(x\right)\right)=\sqrt{3x+1}$. Reescrever a função desta maneira ajuda a colocar tudo no lugar certo dentro da fórmula da regra da cadeia.

O primeiro passo é encontrar a derivada de $f(x)$, isolando $g(x)$. Isso significa que você deve encontrar a derivada de $f(x)$ e, depois disso, substituir $g(x)$ em todos os *x*.

De acordo com a regra da potência, se $f(x) = x^{1/2}$, então

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Agora substitua *x* por *g(x)*:

$$f'\left(g\left(x\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}$$

Estamos quase acabando. O último passo é multiplicar essa fração monstruosa pela derivada de $g(x)$. A regra da potência nos diz que se $g(x) = 3x + 1$, então $g'(x) = 3$:

$$\begin{aligned} y' &= f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot 3 \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Use a regra da cadeia para diferenciar $y = (x^2 + 1)^5$.

Taxas de Variação

As derivadas são muito mais do que parecem ser. Na verdade, elas dão a inclinação da linha tangente à curva. E essa inclinação pode nos dizer muito sobre a curva. Uma característica da derivada que vamos explorar repetidamente é: *a derivada de uma curva nos dá a taxa de variação instantânea da curva*. Isso é fundamental porque uma função curvilínea muda diferentemente em seu domínio – às vezes ela cresce rapidamente e a tangente é íngreme (resultando em uma derivada de valor alto). Em outras localizações, a curva pode crescer de forma rasa ou até mesmo decrescer, resultando em uma derivada baixa ou negativa, respectivamente. Observe o gráfico de $f(x)$ na Figura 9.2.

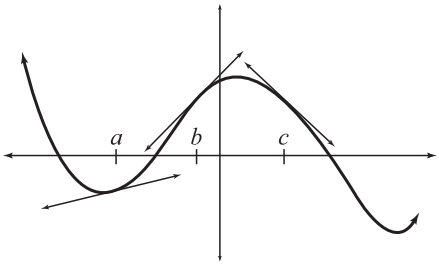


Figura 9.2

Gráfico de $f(x)$ com três pontos de interesse indicados.

Ponto Crítico

O gráfico de uma linha sempre muda em uma mesma proporção. Por exemplo, $g(x) = 4x - 3$ sempre crescerá na proporção de 4, já que essa é a inclinação da linha e também a derivada. Como curvas não são retas, elas nem sempre terão a mesma inclinação para cada valor de x. Mas as curvas não têm a mesma inclinação em todas as localizações, então apoiamo-nos nas inclinações de suas tangentes. Como as tangentes variam dependendo de onde são desenhadas na curva, essa curva terá diferentes taxas de variação, a depender da localização analisada, como ilustrado na Figura 9.2.

Em $x = a$, f cresce levemente, o que torna a tangente rasa. Como uma linha rasa tem inclinação próxima de 0, a derivada vai ser bem baixa. Em outras palavras, a taxa de variação do gráfico é muito baixa no momento em que $x = a$. No entanto, quando $x = b$, o gráfico sobe mais rapidamente, resultando em uma tangente íngreme que, por sua vez, pode resultar em uma derivada maior.

Ponto Crítico

Lembre-se: a inclinação da tangente em uma curva nos dá a taxa de variação da curva naquele valor de x (por exemplo, a taxa de variação instantânea, já que você só pode dizer o que está acontecendo naquele instante). A inclinação de uma secante em uma curva nos dá a taxa *média* de variação em um intervalo específico.

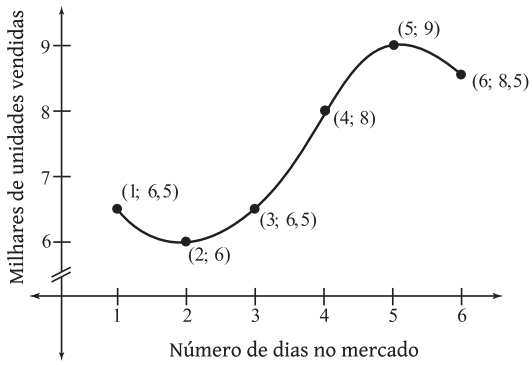
Finalmente, em $x = c$ o gráfico decresce, então a taxa de variação instantânea é negativa (já que a inclinação da tangente é negativa).

Você também pode usar a inclinação da linha *secante* para determinar taxas de variação em um gráfico. Porém, a inclinação da linha secante descreve algo diferente: a taxa *média* de variação em alguma porção do gráfico. É muito fácil encontrar a inclinação de uma secante, como você vai ver no próximo exemplo.

Exemplo 6: A empresa Poteet Inc. acaba de lançar uma nova e revolucionária meia para atletas no mercado. A inovação é um material que absorve o suor e supostamente evita o chulé. No quarto dia de vendas, o slogan "Se você tem mau cheiro nos pés é porque eles não estão usando meias Poteet's" foi lançado e as vendas cresceram imediatamente. A Figura 9.3 é um gráfico numérico das unidades vendidas nos seis primeiros dias de vendas.

Figura 9.3

O nascimento de um império de meias antissuor.



Qual foi a taxa média de unidades vendidas por dia entre os dias 1 e 6?

Solução: O problema pede que encontremos uma taxa média de variação, o que significa encontrar a inclinação "m" da secante que conecta os pontos (1; 6,5) e (6; 8,5). Para isso, use o seu método testado e aprovado de álgebra:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{8{,}5 - 6{,}5}{6 - 1} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Isso significa que as meias Poteet's foram vendidas em uma proporção de dois quintos de mil unidades por dia, ou $\frac{2}{5}.1000 = 400$ unidades/dia em média. Então, apesar de eles terem enfrentado quedas moderadas nas vendas, o novo slogan provavelmente ajudou.

Você Tem Problemas

Problema 5: Dada a função $g(x) = 3x^2 - 5x + 6$, encontre os seguintes valores:

(a) a taxa de variação instantânea de $g(x)$ quando $x = 4$.

(b) a taxa média de variação no intervalo de $x \in [-1,3]$.

Derivadas Trigonométricas

Antes de partirmos da terra das derivadas simples, devemos discutir as derivadas trigonométricas. Cada função trigonométrica tem uma derivada única que seria bom você memorizar. Enquanto algumas são fáceis de desenhar (como você vai ver no Problema 6), outras são bem difíceis, então é melhor memorizar a lista inteira. Confie em mim, um pouco de decoreba agora poupará muita coisa mais tarde. Respire fundo e dê uma olhada nesta lista de importantes derivadas trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Ponto Crítico

A notação $\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)\right)$ significa "a derivada da expressão entre parênteses". Ou seja, $\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)\right) = f'\left(x\right)$.

Não é tão ruim quanto parece – metade das derivadas trigonométricas inversas é diferente da outra apenas por causa de um sinal negativo.

Você vai notar que eu incluí as funções trigonométricas inversas nessa lista, mas talvez não as reconheça. Em vez de usar a notação $y = \text{sen}^{-1}x$ para indicar o inverso do seno, eu uso a notação $y = \text{arcsen}\, x$. Sou um grande fã da segunda notação, já que $\text{sen}^{-1}x$ se parece muito com $(\text{sen}\, x)^{-1}$, que é igual a csc x.

Você terá que estar apto a usar essas fórmulas com as regras do produto, do quociente e da cadeia, então aí vão alguns exemplos para que você se acostume com elas. Lembre-se: se uma função trigonométrica contiver qualquer coisa, exceto uma única variável (como x), você precisa usar a regra da cadeia para determinar a derivada.

Exemplo 7: Se $f(x) = \cos x \,\text{sen}\, 2x$, encontre $f'(x)$ e avalie $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Solução: Como essa função é o produto de duas expressões variáveis, você terá de usar a regra do produto. Além disso, você vai usar a regra da cadeia para derivar sen $2x$, já que contém mais do que apenas x dentro da função seno. De acordo com a regra da cadeia, $\frac{d}{dx}\left(\text{sen}\, 2x\right) = \cos\left(2x\right)\cdot 2 = 2\cos 2x$. Veja a regra do produto em ação:

$$f'\left(x\right) = \cos x \cdot 2\cos 2x + \left(-\,\text{sen}\, x\right)\left(\text{sen}\, 2x\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot 2\cos \pi - 1 \cdot \text{sen}\, \pi = 0 - 0 = 0$$

Você Tem Problemas

Problema 6: Use a regra do quociente para provar que $\frac{d}{dx}\left(\cot x\right) = -\csc^2 x$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Se uma função é diferenciável, deve ser contínua também.
- Uma função não é diferenciável em um ponto de descontinuidade, vértice, ou onde a tangente é vertical.
- A inclinação da tangente de uma função nos fornece a taxa de variação instantânea, e a inclinação de sua secante fornece a taxa média de variação.
- Derivadas simples (tais como polinomiais) geralmente podem ser determinadas por meio da regra da potência.
- Produtos e quocientes de expressões variáveis devem ser diferenciados pelas regras do produto e do quociente, respectivamente.
- Você deve usar a regra da cadeia para diferenciar qualquer função que contenha algo mais além de x.

Capítulo 10

Regras Gerais de Diferenciação

Neste Capítulo

- Equações tangenciais e linhas normais
- Diferenciação de equações com múltiplas variáveis
- Derivadas de funções inversas
- Diferenciação de equações paramétricas

Ainda que a derivada seja apenas a inclinação da linha tangente, seus usos são incontáveis. Já vimos que ela descreve a taxa de variação instantânea de uma função não-linear. Porém, isso não explica por que é um dos conceitos matemáticos mais revolucionários da história. Em breve vamos explorar mais usos (substancialmente mais instigantes também) da derivada.

Mas há muito trabalho sujo até lá (isso te deixa feliz, não?). Este capítulo vai ajudá-lo a realizar tarefas específicas e encontrar derivadas em situações muito particulares. Pense que aprender derivadas é como tentar entrar em forma. No capítulo anterior, você aprendeu o básico, o que equivale a um bom condicionamento cardiovascular e a trabalhar todos os seus músculos harmonicamente. Neste, vamos trabalhar grupos musculares específicos, uma

seção de cada vez. Não há muita similaridade entre os tópicos aqui, mas exercitar todas essas habilidades no momento certo (e saber quando é esse momento) é essencial para você entrar em forma matemática.

Encontrando Equações de Tangentes

Escrever equações de tangentes é uma das habilidades mais básicas e fundamentais do cálculo. Você já sabe como criar a equação de uma linha usando a forma ponto-inclinação (Capítulo 2). Já que você está procurando a equação de uma tangente, a inclinação é a derivada da função! Tudo o que você tem de fazer é descobrir o ponto apropriado – e se isso fosse mais fácil do que é, seria ilegal, com certeza.

Exemplo 1: Escreva a equação da tangente à curva $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ quando $x = 2$.

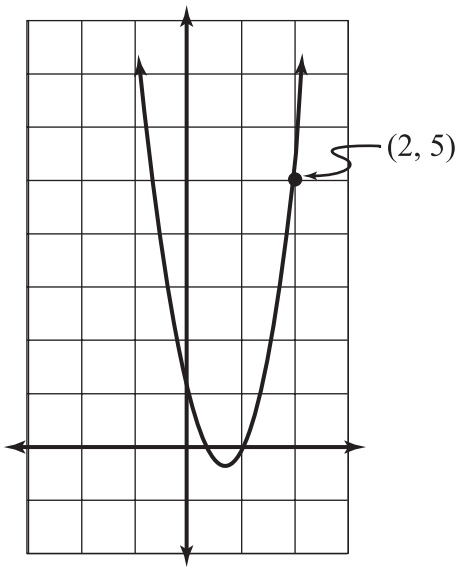
Solução: Dê uma olhada no gráfico de $f(x)$ da Figura 10.1 para captar a essência da nossa tarefa.

Você quer encontrar a equação da tangente ao gráfico no ponto indicado (quando $x = 2$). Esse é o ponto de tangência, onde a linha tangente vai cortar o gráfico. Assim, esse ponto está na curva *e* na tangente. Como a forma ponto-inclinação exige que você saiba um ponto da linha para criar a sua equação, você vai ter de descobrir as coordenadas desse ponto. Como você já sabe o valor de x, coloque-o em $f(x)$ para encontrar o valor de y correspondente.

$$f(2) = 3(2)^2 - 4 \cdot 2 + 1$$
$$= 12 - 8 + 1 = 5$$

Figura 10.1

Gráfico de $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e um futuro ponto de tangência.



Então, o ponto (2,5) está na tangente. Agora você só precisa da inclinação da tangente, $f'(2)$:

$$f'(x) = 6x - 4$$
$$f'(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 8$$

Agora que você conhece um ponto da tangente e a inclinação correta, coloque esses valores na forma ponto-inclinação e surgirá a equação tangencial correta:

$$y - 5 = 8(x - 2)$$
$$y = 8x - 11$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre a equação da tangente para $g(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 2$ quando $x = -1$.

Ocasionalmente, alguém pode pedir para você encontrar a equação da *linha normal* à curva. Como a linha normal é perpendicular à tangente no ponto de tangência, você usa o mesmo ponto para criá-la, mas a sua inclinação é a recíproca negativa (inversa) da inclinação da tangente. Vamos voltar ao exemplo 1 por um instante. Se quiséssemos encontrar a equação da linha normal para $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ quando $x = 2$, ainda usaríamos o ponto (2,5), mas a inclinação seria $-\frac{1}{8}$, e não 8. Mais uma vez, se colocássemos esses valores na forma ponto-inclinação, o problema estaria resolvido.

de•fi•ni•ção

Uma **linha normal** é perpendicular à tangente de uma função no ponto de tangência.

Diferenciação Implícita

Eu mencionei a expressão "em relação a x" algumas vezes, mas agora preciso dizer exatamente o que isso significa. Em 95% dos seus problemas de cálculo, as variáveis em sua expressão vão bater com a variável relacionada no problema. Por exemplo, a derivada de $5x^3 + \operatorname{sen} x$, em relação a x, é $15x^2 + \cos x$. O fato de eu dizer que você estava encontrando a derivada em relação a x não tornou o problema mais difícil ou diferente. Na verdade, eu nem precisaria lhe dizer isso, porque x era a única variável do problema.

Nesta seção, vamos falar das derivadas de equações contendo x e y, e eu sempre vou pedir para você encontrar a derivada em relação a x. Qual a derivada de y em relação a x, você pergunta? A resposta é esta: $\frac{dy}{dx}$. Lê-se literalmente "a derivada de y em relação a x". O numerador mostra o que você está "derivando", e o denominador mostra em relação a quê.

Vamos tentar uma derivada um pouco mais complexa. Qual é a derivada de $3y^2$ em relação a x? A primeira coisa a se observar é que a variável na expressão não bate com a variável que você relaciona, então trate o y como uma função completamente separada e aplique a regra da cadeia. Eu sei que você não está acostumado a usar a regra da cadeia quando há apenas uma variável na função, mas se não é em relação a essa variável que você tenta encontrar a derivada, dê um jeito nela! Então, para diferenciar $3y^2$, comece encontrando a derivada da função externa e isole o y (a função interna) para conseguir $6y$. Agora multiplique isso pela derivada de y em relação a x, e terá:

$$6y\frac{dy}{dx}$$

Você vai encontrar a derivada dy/dx sempre que não conseguir resolver uma equação para y ou para $f(x)$. Você pode não ter notado, mas cada questão sobre derivadas até agora começou com "Encontre a derivada de y =..." ou "Encontre a derivada de $f(x)$...". Quando um problema lhe pede para encontrar $\frac{dy}{dx}$ em uma equação que não pode ser resolvida em y, você precisa recorrer ao processo da *diferenciação implícita*, que envolve derivar variáveis em relação a outras variáveis. Enquanto as derivadas eram indicadas por y' ou $f'(x)$ em outros problemas, na diferenciação implícita elas são indicadas por $\frac{dy}{dx}$.

definição

A **diferenciação implícita** permite que você encontre a inclinação da tangente quando a equação em questão não pode ser resolvida por y.

Exemplo 2: Encontre a inclinação da tangente no gráfico de $x^2 + 3xy - 2y^2 = -4$ no ponto (1,-1).

Solução: Opa! Isso claramente não pode ser resolvido por y, e se você tentar fazê-lo, vai desanimar logo – porque é impossível, já que temos esse y^2 sem graça. A diferenciação implícita vem em seu socorro! A primeira coisa a se fazer é encontrar a derivada de cada termo da equação em relação a x. Como você é um novato, vou fazer isso termo a termo.

A derivada de x^2 em relação a x é $2x$. Não precisa de nada muito elaborado, já que a variável é aquela que estamos relacionando. No entanto, no termo seguinte, $3xy$, você precisa usar a regra do produto, pois há duas variáveis que se multiplicam ($3x$ e y).

Lembre-se de que a derivada de y em relação a x é $\frac{dy}{dx}$, então a derivada correta de $3xy$ é $3x \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \cdot y$. Finalmente, a derivada de $-2y^2$ é $-4y \cdot \frac{dy}{dx}$ e a derivada de -4 é 0. Não se esqueça de diferenciar *os dois* lados da equação! Ainda que eu diferencie implicitamente com muita frequência, às vezes ainda esqueço de diferenciar um termo constante para obter 0. Eu sei, eu sou um babaca.

Juntando tudo, você tem a derivada de:

$$2x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

Mova todos os termos que não contêm $\frac{dy}{dx}$ para o lado direito da equação. Depois que fizer isso, fatore o $\frac{dy}{dx}$ comum no lado esquerdo da equação:

$$3x\frac{dy}{dx} - 4y\frac{dy}{dx} = -2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx}(3x - 4y) = -2x - 3y$$

Para finalmente obter a derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ por si só, divida ambos os lados da equação por $3x - 4y$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 3y}{3x - 4y}$$

Essa é a derivada. O problema pede que você a avalie em (1,–1), então coloque esses valores em x e y para chegar à resposta final

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(1) - 3(-1)}{3(1) - 4(-1)} = \frac{-2 + 3}{3 + 4} = \frac{1}{7}$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre a inclinação da tangente no gráfico de $4x + xy - 3y^2 = 6$ no ponto (3,2).

Diferenciando uma Função Inversa

Digamos que você tenha a função $f(x) = 7x - 5$ e precise avaliar $\left(f^{-1}\right)'(1)$, a derivada da inversa de $f(x)$ quando $x = 1$. Para encontrar a resposta, você deve antes encontrar a função inversa (usando o processo que vimos no Capítulo 3) e, então, a derivada. Entretanto, você sabia que pode avaliar a derivada de uma função inversa *mesmo se não puder achar a função inversa propriamente dita?* (insira uma ópera dramática aqui). Você vai aprender a fazer isso em um minuto, mas antes temos que rever uma habilidade.

É importante que você consiga encontrar valores de uma função inversa a partir apenas da função original antes de tentarmos algo mais difícil. O procedimento que vamos usar é baseado em uma das propriedades mais importantes das funções inversas: se o ponto (a,b) está no gráfico de $f(x)$, o ponto (b,a) está no gráfico de $f^{-1}(x)$. Ou seja, se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$.

Exemplo 3: Se $g(x) = x^3 + 2$, avalie $g^{-1}(1)$.

Solução: *Método 1*: A maneira mais fácil de fazer isso é descobrindo exatamente o que $g^{-1}(x)$ é e, então, substituindo 1. De acordo com a nossa técnica do Capítulo 3, ficaria assim:

$$\begin{aligned} y &= x^3 + 2 \\ x &= y^3 + 2 \\ y^3 &= x - 2 \\ g^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x-2} \end{aligned}$$

Assim, $g^{-1}(1) = \sqrt[3]{1-2} = \sqrt[3]{-1} = -1$. No entanto, existe uma outra maneira de fazer isso sem realmente encontrar $g^{-1}(x)$ antes.

Método 2: Você precisa encontrar a *saída* de $g^{-1}(x)$ quando seu argumento é 1. Lembre-se, eu só disse que $f(a) = b$ implica $f^{-1}(b) = a$, então a saída de g^{-1} quando o argumento é 1 é *exatamente a mesma coisa* que a entrada da função original g quando a *saída* é 1. Então, iguale a função original a 1 e resolva; a solução será $g^{-1}(1)$:

$$\begin{aligned} x^3 + 2 &= 1 \\ x^3 &= -1 \\ x &= \sqrt[3]{-1} = -1 \end{aligned}$$

Claramente, ambos os métodos nos dão a mesma resposta.

Você Tem Problemas

Problema 3: Use a técnica usada no Exemplo 3 – Método 2 – para avaliar $f^{-1}(6)$ se $f(x) = \sqrt{2x^3 - 18}$.

Agora que você tem essa habilidade, podemos avançar para encontrar os valores da derivada da inversa de uma função (diga isso 10 vezes, bem rápido; eu o desafio!). Como no caso de tudo em cálculo, existe um teorema que rege esta prática:

Ponto Crítico

Aqui está um resumo breve desse truque da função inversa. Se eu quiser avaliar $f^{-1}(a)$, coloco $f(x) = a$ e encontro x.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Então, avaliar a derivada é tão simples quanto substituir o valor nesta fórmula com cara de fração levemente mais complexa. Uma vez que você substitui, nosso primeiro objetivo será avaliar $f^{-1}(x)$ no denominador (e por acaso acabamos de praticar isso).

Ponto Crítico

É bem fácil gerar essa fórmula. Comece com a propriedade da função inversa simples $f(f^{-1}(x)) = x$ e encontre a derivada com a regra da cadeia:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x) = 1$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Exemplo 4: Se $f(x) = x^3 + 4x - 1$, avalie $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

Solução: De acordo com a fórmula que você aprendeu agora há pouco:

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}$$

Comece avaliando $f^{-1}(2)$, que é o equivalente a resolver a equação $x^3 + 4x + 1 = 2$. Não é uma equação fácil de resolver; na verdade, não dá pra fazer isso com as mãos. Você vai ter que usar alguma forma de tecnologia para resolvê-la, seja uma calculadora científica especial ou um programa matemático de computador. Um jeito é igualar a equação a zero ($x^3 + 4x - 1 = 0$) e calcular a intersecção com o eixo x em uma calculadora. Não importa o método que você escolha, a resposta será $x = 0{,}2462661722$, que você pode colocar na fórmula:

Alerta do Kelley

A equação do Exemplo 4 pode ser difícil de resolver, mas é impossível calcular a função inversa de $f(x) = x^3 + 4x + 1$ usando as nossas técnicas. Então a tal equação difícil é o único meio de chegar a uma resposta!

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(2) &= \frac{1}{f'(0{,}2462661722)} \\ &= \frac{1}{3(0{,}2462661722)^2 + 4} \\ &= \frac{1}{4{,}1819411} \\ &\approx 0{,}239\end{aligned}$$

Eu sei que são muitas casas decimais, mas eu não queria arredondar nada até que chegássemos à resposta final, senão isso teria tornado todas as etapas imprecisas.

Você Tem Problemas

Problema 4: Se $g(x) = 3x^5 + 4x^3 + 2x + 1$, avalie $\left(g^{-1}\right)'(-2)$.

Derivadas de Funções Paramétricas

Para encontrar a derivada de uma função paramétrica, você diferencia os componentes *x* e *y* separadamente e divide a derivada de *y* pela derivada de *x*. Em "matematiquês", fica assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Essa fórmula sugere que você derive em relação a *t*, mas você deve fazer isso em relação a qualquer termo que aparecer no problema. No próximo exemplo, você vai encontrar a derivada em relação a θ.

Exemplo 5: Encontre a inclinação da tangente na curva paramétrica definida por $x = \cos\ \theta$ e $y = 2\text{sen}\ \theta$ quando $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (Figura 10.2).

Solução: Como o parâmetro dessas equações é θ, a derivada da equação paramétrica é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

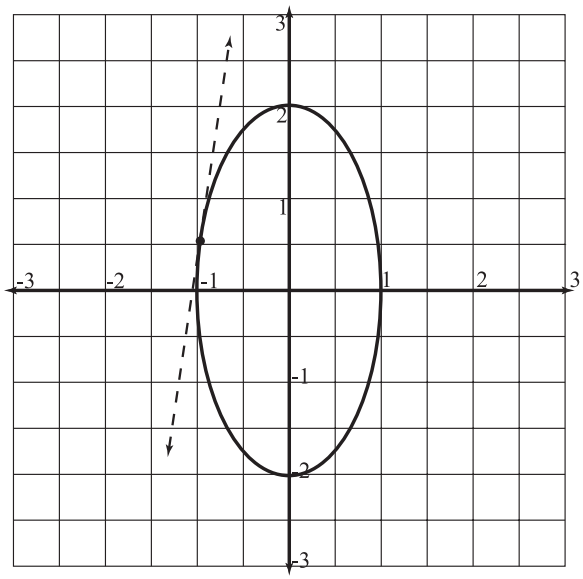


Figura 10.2

Gráfico da curva paramétrica definido por $x = \cos\theta$ e $y = 2\text{sen}\,\theta$ com a tangente em $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Calcule cada derivada: $\frac{dx}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta$ e $\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$.
Por fim, calcule a derivada quando $\theta = \frac{5\pi}{6}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos\frac{5\pi}{6}}{-\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$$

Alerta do Kelley

A derivada de segunda ordem (que, como todas as outras, tem a notação incompreensível $\frac{d^2y}{dx^2}$) de funções paramétricas não é apenas a derivada da primeira derivada. É, acima de tudo, a derivada da primeira derivada dividida pela derivada de *x*:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Determine $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ (a primeira e a segunda derivada) para as equações paramétricas $x = 2t - 3$ e $y = \tan t$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Para escrever a equação de uma tangente, use o ponto de tangência e a derivada em conjunção com a forma ponto-inclinação de uma linha.
- Você precisa diferenciar implicitamente quando uma equação não pode ser resolvida por *y*.
- A derivada de uma função inversa é dada pela fórmula $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.
- Para calcular uma derivada paramétrica, divida a derivada da equação de *y* pela derivada da equação de *x*.

Capítulo 11

Usando Derivadas em Gráficos

Neste Capítulo

- Números críticos e extremos relativos
- Entendendo gráficos de sinal
- Determinando direção e concavidade
- O Teorema do Valor Extremo

Embora os astrólogos tenham reiterado por décadas que o signo astrológico de uma pessoa indica traços de sua personalidade, tendências e destino, muitas pessoas não se convencem, acham tais conceitos absurdos ou (em casos extremos) a maior bobeira (talvez porque afirmações do tipo "a Lua está na terceira casa de Plutão" soem mais como o título de um filme da Disney). Os astrólogos não se dão conta de que na verdade eles chegaram perto da verdade. Acontece que os sinais das derivadas de uma função determinam e explicam como uma função se comporta.

Na verdade, o sinal da primeira derivada de uma função explica em que direção a função está seguindo, e o sinal da segunda derivada prevê com precisão a concavidade da função. Mas é a terceira derivada de uma função que pode dizer quando você vai encontrar seu verdadeiro amor, se terá sucesso nos negócios e quantas vezes por semana é saudável comer ovos no café da manhã. A maneira mais fácil de visualizar os sinais de uma função é por meio de um gráfico de sinal; sim, esse nome soa como um gráfico de raça pura, mas ele é bem comum depois que tudo está explicado e resolvido.

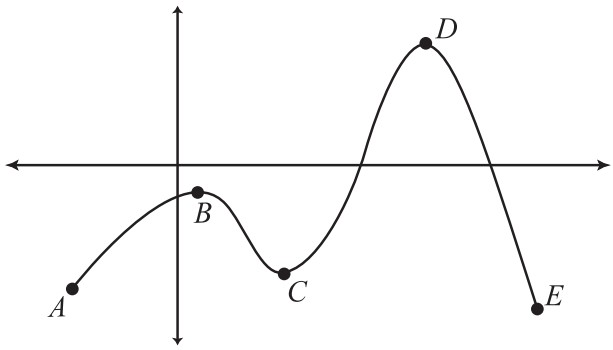
Extremos Relativos

Uma tendência humana comum é comparar-se a outra pessoa em um mesmo patamar. Você provavelmente se pega fazendo isso o tempo todo, pensando em coisas como: "De todos os meus amigos, sou definitivamente o mais engraçado". Talvez você compare coisas mais mundanas, como ser o melhor no futebol ou ter a melhor calça de cotelê. No entanto, quando você sai da sua esfera social, acaba encontrando alguém que é bem mais engraçado do que você ou que usa calças mais chamativas. Isso ilustra a diferença entre um ponto extremo relativo e um ponto extremo absoluto. Você pode ser o mais inteligente em um grupo de amigos sem ser o mais inteligente na face da Terra.

Por exemplo, observe o gráfico na Figura 11.1, com os pontos de interesse *A*, *B*, *C*, *D* e *E* anotados.

Figura 11.1

Este gráfico tem apenas um máximo absoluto e um mínimo absoluto, mas diversos extremos relativos.



O *máximo* absoluto do gráfico está em D, e o mínimo absoluto está em E. Porém, o gráfico tem um máximo *relativo* em B e um mínimo relativo em C. Talvez eles não sejam os pontos mais alto e mais baixo de todo o gráfico, mas (assim como colinas e vales) são os pontos mais alto e mais baixo em sua vizinhança.

Encontrando Números Críticos

Um *número crítico* é um valor de x que faz uma função ser igual a zero ou indefinida. Eles são extremamente úteis para encontrar pontos extremos porque uma função $f(x)$ só pode mudar de direção em um número crítico de sua derivada, $f'(x)$. Quer saber por quê? Quando $f'(x)$ é 0, $f(x)$ não cresce ($f'(x) \geq 0$) nem decresce ($f'(x) \leq 0$), o que significa que $f(x)$ está mais propensa a fazer algo drástico.

de•fi•ni•ção

Um ponto **extremo relativo** (máximo ou mínimo) existe quando ele é maior ou menor do que todos os pontos ao seu redor. Visualmente, um máximo relativo é o pico de uma colina no gráfico, e o mínimo relativo é o ponto mais baixo de uma inclinação no gráfico. Pontos extremos absolutos são os mais altos ou mais baixos de todos os extremos relativos no gráfico. Lembre-se de que o termo "extremos" é o plural de "ponto extremamente alto ou baixo".

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$, encontre $f'(x)$ e seus números críticos.

Solução: Comece encontrando a derivada de $f(x)$, iguale a 0 e resolva:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$
$$x = -\frac{1}{3}, 1$$

de•fi•ni•ção

Um **número crítico** é um valor de x que torna a derivada de uma função igual a 0 ou indefinida.

Como não há uma localização em que $f'(x)$ não exista, $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 1$ são os dois únicos números críticos.

Se você observar o gráfico de $f(x)$, vai notar que ele não muda realmente de direção em tais valores de x (veja a Figura 11.2).

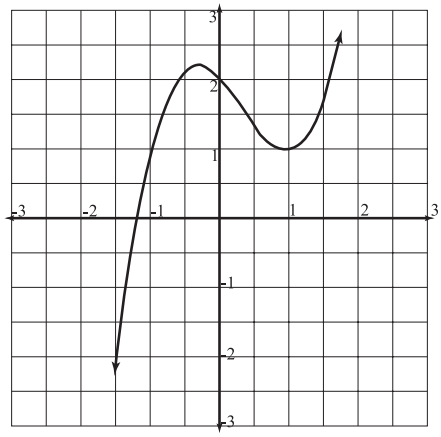
Porém, você não precisa usar o gráfico de uma função para determinar (1) se o gráfico muda de direção ou (2), caso ele mude, se produz um máximo ou mínimo relativo.

Classificando Extremos

Conforme eu mencionei antes, o sinal de $f'(x)$ diz se $f(x)$ cresce ou decresce. Isso é verdade porque um gráfico crescente terá uma tangente com inclinação positiva e um gráfico decrescente terá uma tangente com inclinação negativa. Assim, você consegue dizer o que acontece entre os números críticos de $f'(x)$ (por exemplo, se $f(x)$ cresce ou decresce) escolhendo alguns pontos no gráfico entre eles e determinando se as derivadas ali são positivas ou negativas.

Figura 11.2

O gráfico muda de crescente para decrescente em $x = -\frac{1}{3}$ e, então, volta a crescer em $x = 1$.



Exemplo 2: Se $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ e os números críticos de sua derivada $f'(x)$ são $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 1$, descreva a direção de $f(x)$ entre tais números críticos usando o sinal de $f'(x)$.

Solução: Escolha 3 valores de x: um menor que o primeiro número crítico, um entre os números críticos e um maior que o segundo número crítico. Eu vou escolher valores simples para facilitar a minha vida: $x = -1$, 0 e 2. Coloque esses valores em $f'(x)$, e o sinal do resultado vai dizer se a função $f(x)$ é crescente ou decrescente naquele ponto:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$$
$$f'(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 1 = -1$$
$$f'(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$$

Como $f'(x)$ é positivo quando $x = -1$ e $x = -1$ é menor que o primeiro ponto crítico, a função será crescente até $x = -\frac{1}{3}$, o primeiro número crítico. Porém, a derivada fica negativa entre os números críticos, então f decresce entre $x = -\frac{1}{3}$ e 1.

Depois de $x = 1$, a derivada fica positiva novamente, então $f(x)$ cresce após esse ponto. Isso não é nenhuma surpresa, pois você já viu o gráfico de $f(x)$ na Figura 11.2. Mas tente notar agora como os números críticos criam regiões em que o gráfico toma direções diferentes (para cima e para baixo) enquanto você prossegue pelo gráfico da esquerda para a direita. A Figura 11.3 mostra os sinais de $f'(x)$ e o gráfico de $f(x)$ ao mesmo tempo para ajudar você a visualizar o que está acontecendo.

Você Tem Problemas

Problema 1: Dada a função $h(x) = -x^2 + 6x + 27$, calcule o número crítico de $h'(x)$ e determine se representa ou não um máximo ou mínimo relativo com base nos sinais de $h'(x)$.

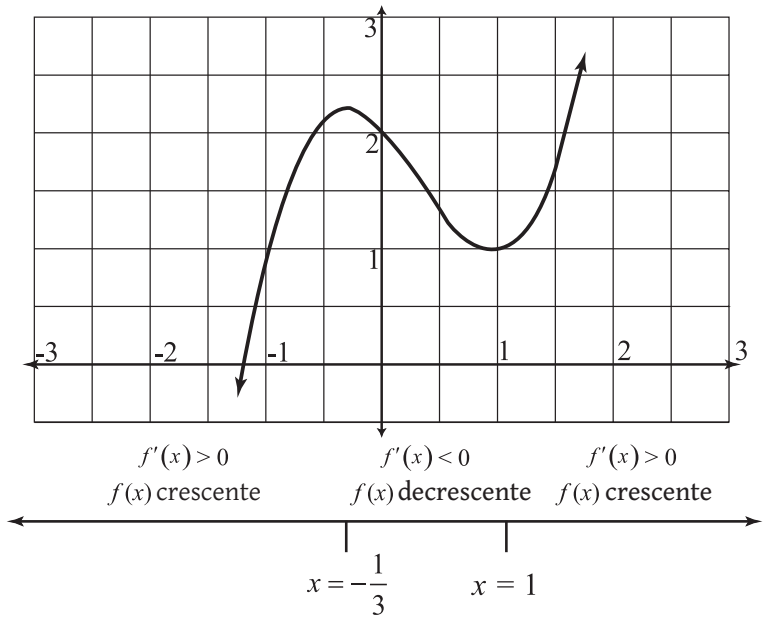


Figura 11.3

Note que o sinal da derivada se correlaciona com a direção da função original. A linha numerada é, na verdade, um gráfico de sinal, como vamos ver na próxima seção.

O Gráfico de Sinal

Os *gráficos de sinal* são um jeito compacto e bonitinho de visualizar os sinais da derivada de uma função de uma só vez. Para criar um gráfico de sinal, vamos usar o procedimento do Exemplo 2. Ou seja, vamos encontrar os números críticos, escolher "valores de teste" entre os críticos e colocá-los na derivada para determinar a direção da função. O resultado será uma linha numerada, segmentada por números críticos e rotulados com os sinais da derivada em cada intervalo. Isso vai nos ajudar a encontrar bem rápido os pontos extremos relativos no gráfico.

Exemplo 3: Crie um gráfico de sinal para a função $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 5}$ e use-o para determinar quais números críticos são extremos relativos.

Solução: Primeiro você precisa encontrar os números críticos, de modo que $f'(x)$ seja igual a 0 ou indefinida. Use a regra do quociente para encontrar $f'(x)$:

de•fi•ni•ção

Um **gráfico de sinal** é uma linha numerada segmentada que descreve a direção de uma função. Para criar um, devemos encontrar números críticos que determinem intervalos-limite, escolher valores amostrais desses intervalos e colocar tais valores na derivada para se obter o sinal apropriado. É chamado assim porque representa o sinal positivo ou negativo do gráfico da função (ou seja, se é crescente ou decrescente).

$$f'(x) = \frac{(x-5)(2x+2) - (x^2+2x+1)}{(x-5)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 10x - 11}{(x-5)^2}$$

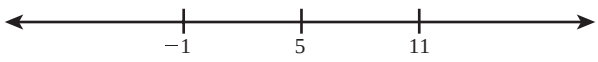
Como é uma fração, é igual a 0 quando o numerador é igual a 0 e indefinida quando o denominador é igual a 0. Esses dois eventos nos interessam para encontrar números críticos, então fatore o numerador, iguale o numerador e o denominador a 0 e resolva:

$$f'(x) = \frac{(x-11)\ (x+1)}{(x-5)^2}$$

A derivada é 0 quando $x = 11$ ou -1 e indefinida quando $x = 5$, então esses são os números críticos. Desenhe uma linha numérica e marque os números nela, como na Figura 11.4.

Figura 11.4

O início de um gráfico de sinal. Note que você não precisa rotular nenhum número, apenas os números críticos; você nem precisa se preocupar em desenhar a escala. É apenas uma ferramenta de visualização, não um gráfico científico.



Esses três números críticos separam a linha numérica em quatro intervalos. Lembre-se de que a função sempre vai seguir na mesma direção em cada intervalo, já que ela só pode mudar de direção nos números críticos. Assim, você pode escolher qualquer número em cada intervalo como um "valor teste". Vou escolher $x = -2$, 0, 6 e 12. Agora, coloque esses números na derivada:

$$f'(-2) = \frac{(-13)(-1)}{(-7)^2} = \frac{13}{49}$$

$$f'(0) = \frac{(-11)(1)}{(-5)^2} = -\frac{11}{25}$$

$$f'(6) = \frac{(-5)(7)}{1^2} = -35$$

$$f'(12) = \frac{(1)(13)}{7^2} = \frac{13}{49}$$

Como $f'(-2)$ é positiva, $f'(x)$ é positiva em todo o intervalo $(-\infty,-1)$, então indique isso com um sinal "+" no intervalo do gráfico de sinal. Faça o mesmo para os outros intervalos e você vai obter a Figura 11.5.

Agora você pode dizer que a função muda de direção (de crescente para decrescente) em $x = -1$. Se você colocar esse número crítico em $f(x)$, vai obter o ponto de máximo relativo $(-1, 0)$. Da mesma forma, uma mudança de sinal em $x = 11$ indica um mínimo relativo no ponto crítico $(11, 24)$.

Ponto Crítico

Se a função muda de crescente para decrescente em um ponto crítico, esse ponto é um máximo relativo. Da mesma forma, uma mudança de decrescente para crescente indica um mínimo relativo.

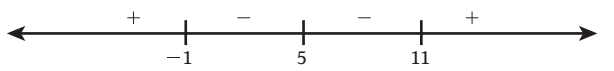


Figura 11.5

Os sinais de $f'(x)$ correspondem à direção de $f(x)$. Positivo significa crescente, negativo significa decrescente. Note que o gráfico de sinal é marcado como "$f'(x)$". Sempre marque seus sinais para evitar confusão.

Você Tem Problemas

Problema 2: Desenhe o gráfico de sinal da função $g(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 3x + 10$ e determine os intervalos em que g é crescente.

O Teorema do Valor Extremo

Sua primeira experiência com teoremas foi o Teorema do Valor Médio. Você se lembra disso com carinho? Acho que é uma pergunta teórica, pois você gostando ou não, aí vai o segundo teorema. O Teorema do Valor Extremo, como seu predecessor, não nos diz nada de excepcional, mas faz muito sentido, então é algo a mais.

Teorema do Valor Extremo: Se uma função $f(x)$ for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então $f(x)$ tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto em $[a, b]$.

Alerta do Kelley

Antes de concluir que uma mudança de sinal em um gráfico de sinal indica um ponto extremo relativo, assegure-se de que a função original é definida ali! Por exemplo, em $f(x) = \frac{1}{x^2}$ a função muda de crescente para decrescente em $x = 0$ (verifique com um gráfico de sinal de $f'(x)$). Porém, $x = 0$ não está no domínio de $f(x)$, então não pode ser um máximo relativo.

Esse teorema simplesmente nos diz que uma parte de função contínua sempre terá um ponto mais alto e um mais baixo. E só. Uma dica: os extremos absolutos de uma função podem existir apenas em uma de duas localizações – em um ponto extremo relativo ou em um ponto final. Esse truquezinho permite que os pontos extremos absolutos sejam mais facilmente encontrados.

Exemplo 4: Encontre o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - x + 2$ no intervalo [–2, 1].

Solução: Os extremos absolutos que você procura existem garantidamente de acordo com o Teorema do Valor Extremo, já que $f(x)$ é contínua no intervalo fechado. Na verdade, $f(x)$ é contínua em todas as partes! Comece desenhando um gráfico de sinal. O mesmo processo de sempre: use $f'(x) = 0$ e coloque valores-teste na derivada:

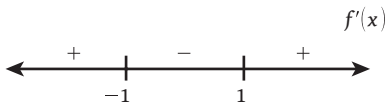
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^4 - 2x^2 - 1 \\ &= \left(3x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right) = 0 \\ &= \left(3x^2 + 1\right)(x + 1)(x - 1) = 0 \end{aligned}$$

$x = -1, 1$

Verifique o gráfico de sinal na Figura 11.6. Como o sinal de sua derivada muda em ambos os números críticos (e estão ambos no domínio de $f(x)$), você sabe que $x = -1$ e 1 marcam um extremo relativo, e possivelmente extremos absolutos também.

Figura 11.6

De acordo com esse gráfico de sinal, $f(x)$ muda de direção duas vezes.



Alerta do Kelley

Não há uma solução para a equação $3x^2 + 1 = 0$ no Exemplo 4 porque isso lhe daria $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}}$, e não se pode extrair a raiz quadrada de um número negativo.

Como um valor extremo (máximo ou mínimo absoluto) só pode existir em um número crítico ($x = -1$ ou 1) ou em um ponto final ($x = -2$ ou 1), coloque cada valor de x em $f(x)$ para ver qual deles chega aos valores mais baixo e mais alto:

$$f(-2) = -\frac{148}{15} \approx -9{,}867$$

$$f(-1) = \frac{46}{15} \approx 3{,}067$$

$$f(1) = \frac{14}{15} \approx 0{,}9333$$

Assim, o máximo absoluto de $f(x)$ no intervalo fechado $[-2, 1]$ será $\frac{46}{15}$ e o mínimo absoluto é $-\frac{148}{15}$. Eu sei que essas frações são feias, mas o que não te mata te fortalece, certo? Você não vai cair nessa, vai?

Alerta do Kelley

Responder um máximo absoluto –1 e um mínimo absoluto –2 no Exemplo 4 é um erro comum. Embora esses valores sejam os valores de *x* onde os extremos existem, não são valores extremos. Máximos e mínimos absolutos são alturas – valores de função, não valores de *x*.

Você Tem Problemas

Problema 3: Encontre o máximo e o mínimo absoluto de $g(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 2$ no intervalo fechado $[-5, 2]$.

Determinando a Concavidade

Assim como a derivada de $f'(x)$ descreve a direção da função $f(x)$, o sinal da segunda derivada descreve $f''(x)$, a concavidade de $f(x)$. Em outras palavras, se $f''(x)$ é negativa, $f(x)$ é côncava para baixo. Mas o que é concavidade, afinal? Tem alguma coisa a ver com higiene bucal?

Ponto Crítico

O sinal de $f''(x)$ não só descreve a concavidade de $f(x)$ como também a direção de $f'(x)$. Isso porque $f''(x)$ também é a primeira derivada de $f'(x)$, e lembre-se de que as primeiras derivadas descrevem a direção de seus predecessores. Por exemplo, se $g''(2) = -7$ para uma função $g(x)$, então sabemos que $g(x)$ é côncava para baixo quando $x = 2$ (já que a segunda derivada é negativa), e sabemos que $g'(x)$ é decrescente em $x = 2$.

A *concavidade* descreve a direção a que uma curva pende. Uma curva que pode armazenar água adicionada do topo do gráfico é chamada de côncava para cima, enquanto uma que não pode é chamada de côncava para baixo. No entanto, se $f''(x)$ for negativa, $f(x)$ é côncava para baixo. Você pode se lembrar dessa relação entre o sinal da segunda derivada e a concavidade usando a Figura 11.8.

de•fi•ni•ção

A **concavidade** de uma curva descreve para onde uma curva pende. Note que a curva côncava para cima da Figura 11.7 poderia armazenar água adicionada do topo, enquanto a curva côncava para baixo jogaria toda a água no chão, deixando a sua mãe bem nervosa.

Figura 11.7

O conto de duas curvas cujas derivadas são diferentes (você vai me entender em breve).

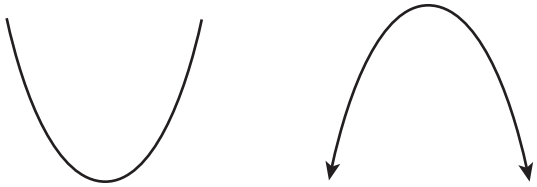
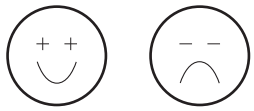


Figura 11.8

O sorriso é côncavo para cima, indicando uma segunda derivada positiva com os olhos positivos. Você também estaria triste se estivesse côncavo para baixo.



definição

A concavidade de um gráfico muda em um **ponto de inflexão**.

Assim como a direção, entretanto, a concavidade de uma curva pode mudar ao longo do domínio de uma função (os pontos de mudança são chamados *pontos de inflexão*). Você vai usar um processo que espelha o gráfico da primeira derivada para determinar a concavidade de uma função.

Outro Gráfico de Sinal

Espero que você tenha notado como um gráfico de sinal pode ser útil para visualizar a direção de uma função. Assim como também é útil para visualizar a concavidade, e também igualmente fácil. Dessa vez, você vai usar a segunda derivada para criar a linha numérica ondulada, e colocar os valores da segunda derivada, e não da primeira, para determinar os sinais apropriados. Vamos revisitar uma velha amiga, $f(x)$ do Exemplo 4.

Exemplo 5: Em quais intervalos a função $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - x + 2$ é côncava para cima?

Solução: Encontre a segunda derivada, $f''(x)$, e use-a para criar um gráfico de sinal, como você fez agora há pouco neste capítulo. A única diferença é que você vai usar $f''(x)$ para tudo em vez de usar $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^4 - 2x^2 - 1$$
$$f''(x) = 12x^3 - 4x$$

Coloque $f''(x) = 0$ e encontre x para conseguir seus números críticos:

$$4x\left(3x^2 - 1\right) = 0$$
$$x = 0, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Não se esqueça do sinal ±, já que você está extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da equação. Está na hora de desenhar o gráfico de sinal e escolher pontos-teste, como fizemos antes. Como você já sabe fazer isso, vamos pular para o gráfico correto, na Figura 11.9.

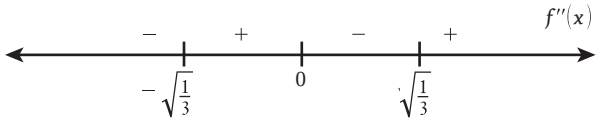


Figura 11.9

Gráfico de sinal da segunda derivada de $f(x)$.

A função $f(x)$ é côncava para cima quando $f''(x)$ é positiva, então $f(x)$ é côncava para cima em $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},0\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\infty\right)$.

Você Tem Problemas

Problema 4: Quando $f(x) = \cos x$ é côncava para baixo em $(0,2\pi)$?

Teste da Segunda Derivada

Ainda que seja chamado assim, esse truquezinho matemático nos diz se um ponto extremo é ou não é um máximo ou mínimo relativo (que você encontrou usando os sinais da primeira derivada e de um gráfico de sinal antes). O teste da segunda derivada usa o sinal da segunda derivada (e, portanto, a concavidade do gráfico nesse ponto) para fazer todo o serviço.

Teste da Segunda Derivada: Coloque os números críticos existentes em $f'(x) = 0$ ou quando $f'(x)$ for indefinida em $f''(x)$. Se o resultado for positivo, o número crítico é um mínimo relativo em $f(x)$. Se o resultado for negativo, esse número crítico marca um máximo relativo em $f(x)$. Se o resultado for 0, você não pode chegar a conclusão nenhuma com o teste da segunda derivada e terá de recorrer ao gráfico de sinal da primeira derivada.

Exemplo 6: Classifique todos os extremos relativos da função $g(x) = 3x^3 - 18x + 1$ usando o teste da segunda derivada.

Solução: Primeiro, encontre os números críticos, como fizemos antes neste mesmo capítulo:

$$g'(x) = 9x^2 - 18 = 0$$
$$9x^2 = 18$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

Ponto Crítico

Se você pensar bem, o único ponto extremo possível em um gráfico côncavo para cima é um mínimo relativo – tome o ponto (0, 0) no gráfico de $y = x^2$ como exemplo.

Coloque $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ em $g''(x) = 18x$. Como $g''\left(\sqrt{2}\right) = 18\sqrt{2}$, que é positiva, $x = \sqrt{2}$ representa a localização de um mínimo relativo (de acordo com o teste da segunda derivada) e, de modo oposto, como $g''\left(-\sqrt{2}\right) = -18\sqrt{2}$, isso representa um máximo relativo.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Números críticos são valores de x que igualam uma função a 0 ou a tornam indefinida. O gráfico de $f(x)$ pode mudar de direção apenas em um número crítico de sua derivada, $f'(x)$.
- Se $f'(x)$ for positiva, $f(x)$ é crescente; uma $f'(x)$ negativa indica uma $f(x)$ decrescente.
- Se $f''(x)$ for positiva, $f(x)$ é côncava para cima; uma $f''(x)$ negativa indica uma $f(x)$ côncava para baixo.
- O gráfico de sinal da primeira derivada e o teste da segunda derivada são técnicas usadas para classificar pontos extremos relativos.

Capítulo 12

Derivadas e Movimento

Neste Capítulo

- O que é uma equação de posição?
- A relação entre posição, velocidade e aceleração
- Rapidez versus velocidade
- Entendendo movimento de projéteis

A matemática pode mesmo ser aplicada no mundo real. Isso pode chocar ou assustar você, mas é verdade. É provavelmente chocante, porque a maioria dos problemas com os quais lidamos até agora era puramente de natureza computacional, completamente destituída de qualquer ligação com o mundo real. (Por exemplo, estimar quilometragem de gasolina é uma habilidade matemática importante na vida real, enquanto fatorar a diferença de polinômios cubos perfeitos não é tão útil assim). A maioria das pessoas odeia problemas aplicáveis à vida real porque são (insira um uivo arrepiante de lobo aqui) problemas com palavras!

Fatorar e resolver equações pode ser automático, repetitivo e um pouco chato, mas pelo menos elas são previsíveis. Quantas noites você foi dormir assombrado por problemas como este: "Se um trem A está viajando do Rio de Janeiro até Minas Gerais a uma velocidade de 110 km/h, o trem B está viajando a 30 km menos do que a metade do número dos passageiros do sexo masculino do trem A, e o letreiro do trem B é 3 graus menor do que a diferença de pedaços de um sanduíche em cada trem, a que horas o condutor do trem vai lembrar que se esqueceu de programar o gravador de DVD para gravar o seu programa preferido?"

As equações de posição são uma transição razoável para problemas de cálculo com palavras. Ainda que sejam um pouco bizarras, elas seguem padrões claros. Além disso, elas lhe dão a chance de mostrar suas novas habilidades com as derivadas.

Equação de Posição

Uma *equação de posição* é uma equação que modela matematicamente algo na vida real. Especificamente, ela dá a posição de um objeto em um tempo específico. Vários livros e professores usam notações diferentes, mas eu sempre vou indicar uma equação de posição com $s(t)$, apenas para ser consistente. Colocando valores de t na equação, você pode determinar onde o objeto em questão estava naquele momento exato. Caso você esteja ficando estressado, vou adicionar algo bonitinho e fofinho nessa nossa mistura – minha gata, a Amendoim.

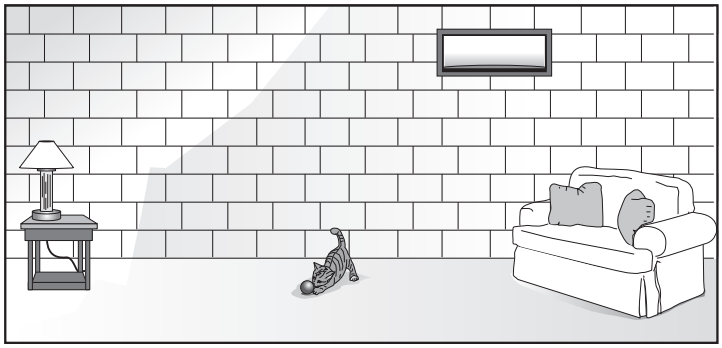
de•fi•ni•ção

Uma **equação de posição** é um modelo matemático que mostra a posição de um objeto em um determinado tempo t. A posição é geralmente determinada em relação a um ponto de referência fixo, como o chão ou a origem, para que uma posição negativa signifique algo. Por exemplo, $s(5) = -6$ pode significar que o objeto em questão está 6 pés abaixo da origem após 5 segundos.

A Amendoim tem o espaço do meu porão para correr, e seu passatempo favorito (além de seu estranho hábito de mastigar meus óculos) é rebater uma bola de lá para cá pelas paredes do porão. Para simplificar, digamos que a parede em questão tenha 20 m; vamos chamar a posição exata da metade da parede de *posição 0*, a extremidade esquerda da parede (nossa esquerda, não a esquerda da Amendoim) de *posição -10*, e a extremidade direita da parede de *posição 10*, como na Figura 12.1.

Figura 12.1

Domínio da gata Amendoim. Apenas para referenciar, nomeei as extremidades e o centro do cômodo.



Vamos examinar a posição da gatinha versus tempo com um exemplo simples. Vamos voltar a esse exemplo várias vezes neste capítulo enquanto compusermos o nosso conhecimento sobre derivadas e movimento (e brincadeiras felinas).

Exemplo 1: Durante os primeiros 4 segundos de uma brincadeira felina, a posição de Amendoim (em pés por tempo = t segundos) ao longo da parede é dada pela equação $s(t) = t^3 - 3t^2 - 2t + 1$. Avalie e explique o que quer dizer $s(0)$, $s(2)$ e $s(4)$.

Alerta do Kelley

A posição dada por $s(t)$ no Exemplo 1 é a posição horizontal da gatinha – se fosse vertical, a resposta negativa seria perturbadora. Todos os problemas envolvendo posição deveriam inferir o que se quer dizer com suas respostas e, em geral, também incluem unidades (tais como metros ou segundos).

Solução: Coloque cada valor em $s(t)$. Uma resposta positiva significa que ela está indo em direção à extremidade direita do cômodo, enquanto uma resposta negativa significa que ela está à esquerda do centro. Quanto maior o valor, mais próxima da direita ou da esquerda ela está.

$$s(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + 1 = 1$$
$$s(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 1 = 8 - 12 - 4 + 1 = -7$$
$$s(4) = 4^3 - 3\cdot 4^2 - 2\cdot 4 + 1 = 64 - 48 - 8 + 1 = 9$$

Assim, quando $t = 0$ (antes de você medir o tempo decorrido), $s(0) = 1$ diz que a gatinha começou a brincar 1 m à direita do centro. Dois segundos mais tarde ($t = 2$), ela usou seus movimentos felinos supersônicos para viajar 8 m para a esquerda, o que significa que ela está a 3 m da extremidade esquerda e a 7 m do centro. Dois segundos depois ($t = 4$), ela se moveu 16 m para a direita, estando a apenas 1 m da extremidade direita da parede. Essa gatinha se move rápido, não?

Não há nada de mais nas equações de posição; dado um determinado valor de tempo, você tem condições de dizer a posição do objeto naquele instante. Note que a equação de posição do Exemplo 1 é um polinômio bacana, contínuo e diferenciável. Dá para encontrar a derivada de um jeito ridiculamente fácil, mas o que a derivada de uma equação de posição representa?

Ponto Crítico

O valor $s(0)$ é geralmente chamado de **posição inicial**, já que determina a posição do objeto antes de você começar a medir o tempo. Similarmente, $v(0)$ e $a(0)$ são a **velocidade** e a **aceleração iniciais**.

Você Tem Problemas

Problema 1: Uma partícula se move verticalmente (em polegadas) ao longo do eixo y de acordo com a equação de posição $s(t) = \frac{1}{2}t^3 - 5t^2 + 3t + 6$, onde t representa segundos. Em que instante(s) a partícula está 30 polegadas abaixo da origem?

Velocidade

Lembre-se de que a derivada descreve a taxa de variação de uma função. Assim, $s'(t)$ descreve a velocidade do objeto em questão em qualquer instante dado. Faz sentido que a velocidade seja equivalente à taxa de variação de posição, já que velocidade mede o quão rápido você se movimenta de uma posição a outra. A rapidez também mede algo parecido com isso, mas rapidez e velocidade não são a mesma coisa.

A velocidade combina a rapidez de um objeto e sua direção, enquanto a rapidez apenas lhe dá a taxa à qual um objeto viaja. Em termos práticos, significa que a velocidade pode ser negativa, mas a rapidez não. O que significa velocidade negativa? Depende do problema! Em um problema de movimento horizontal (como o da gata Amendoim), significa velocidade em direção à esquerda (porque definimos o lado esquerdo como a direção negativa). Em movimento vertical, uma velocidade negativa em geral significa que o objeto está caindo.

Ponto Crítico

Se um objeto está se movimentando para baixo a 15 m/s, você poderia dizer que sua velocidade é –15 m/s, enquanto a sua rapidez é 15 m/s. Rapidez sempre é o valor absoluto da velocidade.

Para determinar a velocidade de um objeto em qualquer instante, calcule a derivada e substitua em t o instante desejado. Porém, se você quiser saber a velocidade média de um objeto (taxa de variação média, por exemplo), lembre-se que esse valor vem da inclinação da secante. Você se lembra como a Amendoim se movia rápido no Exemplo 1? Vamos chegar aos mesmos valores usando a derivada.

Exemplo 2: A posição de Amendoim, em metros, para $0 \leq t \leq 4$ segundos é dada por $s(t) = t^3 - 3t^2 - 2t + 1$. Encontre a velocidade e a rapidez em $t = 1$ e $t = 3{,}5$ segundos. Determine, também, a velocidade média no intervalo $[1; 3{,}5]$.

Solução: Esse problema tem várias etapas, mas nenhuma delas é difícil. Comece calculando a velocidade nos instantes dados. Lembre-se que a velocidade é a primeira derivada da equação de posição, então $s'(t) = v(t) = 3t^2 - 6t - 2$:

$$v(1) = 3 - 6 - 2 = -5 \text{ m/s}$$

$$v(3{,}5) = 36{,}75 - 21 - 2 = 13{,}75 \text{ m/s}$$

A Amendoim se move a 5 m/s para a esquerda (já que a velocidade é negativa) em $t = 1$ segundo. Ela se move mais rápido, a 13,75 m/s para a direita, quando $t = 3{,}5$ segundos. Agora, para encontrar a velocidade média em $[1; 3{,}5]$ – é igual à inclinação do segmento de linha que conecta os pontos na posição do gráfico em que $t = 1$ e $t = 3{,}5$. Para encontrar esses pontos, substitua-os em $s(t)$:

$$s(1) = 1 - 3 - 2 + 1 = -3$$
$$s(3.5) = 42{,}875 - 36{,}75 - 7 + 1 = 0{,}125$$

Calcule a inclinação da secante usando os pontos (1;–3) e (3,5; 0,125):

$$m = \frac{0{,}125 - (-3)}{3{,}5 - 1} = 1{,}25 \text{ m/s}$$

Assim, ainda que ela corra para a esquerda e para a direita em velocidades variadas ao longo do intervalo [1; 3,5], sua velocidade média é 1,25 m/s para a direita.

Alerta do Kelley

A inclinação da tangente de uma equação de posição é a velocidade instantânea no ponto de tangência. A inclinação da secante de uma equação de posição mostra a velocidade média ao longo do intervalo. Note que as variações instantânea e média são baseadas em inclinações lineares desenhadas na equação de posição, e não em sua derivada.

Você Tem Problemas

Problema 2: Uma partícula se move verticalmente (em centímetros) ao longo do eixo *y* e de acordo com a equação de posição $s(t) = \frac{1}{2}t^3 - 5t^2 + 3t + 6$, onde *t* representa o tempo em segundos. Classifique do menor para o maior: a rapidez quando $t = 3$, a velocidade quando $t = 7$ e a velocidade média no intervalo [2, 6].

Aceleração

A velocidade está para a posição assim como a aceleração está para a velocidade. Em outras palavras, a aceleração é a taxa de variação da velocidade. Pense nisso: se você está dirigindo um carro que de repente acelera, a sensação de ser empurrado contra o banco se dá por causa dos efeitos da aceleração. Não é a alta taxa de rapidez que torna as montanhas-russas tão assustadoras. Além da altura delas, são as acelerações e desacelerações súbitas que fazem os passageiros sentirem vertigem (e ocasionalmente a última refeição que fizeram...).

Para calcular a aceleração de um objeto, avalie a segunda derivada da equação de posição (ou a primeira derivada da velocidade). Para calcular a aceleração média, encontre a inclinação da secante na função da velocidade (pelo mesmo motivo que a velocidade média é a inclinação da secante na função de posição). Vamos dar uma olhada na gata dos mistérios matemáticos mais uma vez.

Ponto Crítico

As unidades para a aceleração serão as mesmas unidades da velocidade, mas o denominador será ao quadrado. Por exemplo, se a velocidade é medida em metros por segundos (m/s), a aceleração é medida em metros por segundo por segundo, ou m/s^2.

Ponto Crítico

Se a primeira derivada de posição representa velocidade e a segunda aceleração, a terceira derivada representa "impulso", a taxa de variação da aceleração. Pense em impulso como a sensação de trocar a marcha do seu carro e mudar a aceleração. Nunca vi um problema sobre impulso, mas conheço alguns matemáticos bem impulsivos.

Exemplo 3: A posição de Amendoim, em pés, a qualquer instante $0 \le t \le 4$ segundos é dada por $s(t) = t^3 - 3t^2 - 2t + 1$. Quando ela desacelera no intervalo [0, 10]?

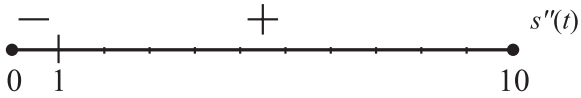
Solução: Como o sinal da segunda derivada determina a aceleração, você quer saber quando $s''(x)$ é negativa. Então, faça um gráfico de sinal para $s''(x)$ igualando-a a 0, encontrando os números críticos e escolhendo pontos de teste (como no Capítulo 11). O gráfico de sinal da segunda derivada é dado na Figura 12.2.

$$s'(t) = v(t) = 3t^2 - 6t - 2$$
$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 6t - 6$$
$$6t - 6 = 0$$
$$t = 1$$

A equação da aceleração $s''(t)$ é negativa no intervalo (0, 1), então a gatinha desacelera apenas entre $t = 0$ e $t = 1$.

Figura 12.2

Como $s''(x)$ é negativa em (0, 1), ela desacelera nesse intervalo.



Você Tem Problemas

Problema 3: Uma partícula se move verticalmente (em centímetros) ao longo do eixo *y* e de acordo com a equação de posição $s(t) = \frac{1}{2}t^3 - 5t^2 + 3t + 6$, onde t representa o tempo em segundos. Em que instante *t* a aceleração da partícula é igual a –1 cm/s²?

Movimento de Projéteis

Ponto Crítico

Inquestionavelmente, um dos exemplos mais grosseiros de movimento de projétil está no filme *O Exorcista*. Mas não vamos usar nenhum exemplo com sopa de ervilhas.

Um dos tipos de movimento mais fáceis de modelar em cálculo básico é o movimento de projéteis, o movimento de um objeto sobre o qual apenas a gravidade age. Você já notou que qualquer objeto arremessado segue um caminho parabólico até o chão? É muito fácil escrever a equação de posição que descreve esse trajeto com pouca informação. Mas essas equações não podem mostrar a posição exata, pois ignorando a resistência do ar, o problema se torna bem mais fácil.

Os cientistas geralmente acham essas aplicações matemáticas pseudocientíficas bobagem, e dizem que ignorar fatores como resistência do ar e obstáculos invalidam esses exemplos. Os matemáticos geralmente argumentam que esses exemplos, embora não sejam perfeitos, mostram como um simples conceito matemático pode ser útil.

A equação de posição de um projétil é assim:

$$s(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$$

Você coloca a velocidade inicial do objeto em v_0, a altura inicial em h_0 e a constante gravitacional apropriada em g (aceleração da gravidade) – use $g = 10$ m/s^2, se o problema contiver metros. Depois que você cria a sua equação de posição substituindo na fórmula, ela vai funcionar como as outras equações deste capítulo, mostrando a altura vertical do objeto em relação ao chão em qualquer instante t (por exemplo, uma posição 12 é traduzida como 12 pés acima do chão).

Exemplo 4: Vamos fazer uma viagem aos anos 1970. Uma estação de rádio está fazendo uma promoção. Para o Natal, eles vão jogar perus vivos de helicópteros pela cidade, mas eles não sabem que os perus não são muito bons com essa coisa de voar. Assumindo que os perus foram jogados a uma velocidade inicial minúscula de 2 m/s de uma altura de 1.000 m, quanto tempo leva até que um peru chegue ao solo, e a qual aceleração o peru vai estar viajando nesse instante?

Ponto Crítico

Note que g é sempre igual a 10. Isso ocorre porque a força gravitacional nunca muda.

Solução: Você tem $v_0 = 2$ e $h_0 = 1.000$, então coloque esses valores na fórmula para chegar à equação de posição de $s(t) = -5t^2 + 2t + 1.000$. Você quer saber quando eles vão chegar ao chão, o que significa que eles têm a posição 0, então resolva a equação $-5t^2 + 2t + 1.000 = 0$. Você pode usar uma calculadora ou a fórmula quadrática para chegar à resposta de $t = 14{,}3445$ segundos (a outra resposta, -13,94, não faz sentido – uma resposta negativa sugere voltar no tempo, e isso nunca é uma boa ideia, ainda mais com aves domésticas). Se você colocar esse valor em $s'(x)$, vai descobrir que os perus estavam caindo a uma velocidade de 141,44 m/s. Ah, a humanidade.

Você Tem Problemas

Problema 4: Se uma bola de canhão é atirada de uma colina a 75 metros do chão com velocidade inicial de 100 m/s, qual a maior altura que ela vai alcançar?

O Mínimo que Você Precisa Saber

- A equação de posição lhe diz a posição de um objeto em um instante *t*.
- A derivada da equação de posição é a equação da velocidade, e a derivada da velocidade é a aceleração.
- Se você colocar 0 na posição, velocidade ou aceleração, vai chegar ao valor inicial da função.
- A fórmula da posição de um projétil é $s(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$.

Capítulo 13

Aplicações Comuns das Derivadas

Neste Capítulo

- Limites das expressões indeterminadas
- Teorema do Valor Médio
- Teorema de Rolle
- Calculando taxas relativas
- Maximizando e minimizando funções

Foi divertido, mas nosso tempo com a derivada está quase acabando. Não fique muito triste ainda – guardei o melhor para o final, e este capítulo será muito divertido (se você gosta de resolver problemas, é claro). Assim como no capítulo anterior, vamos analisar a relação entre o cálculo e o mundo real, e você provavelmente ficará surpreso com o que pode fazer com procedimentos simples de cálculo.

Temos de tudo: atalhos legais, teoremas de existência, romance, aventura, e dois tópicos que a maioria dos estudantes no primeiro ano de cálculo acha complicado. Pelo bem da previsibilidade, vamos passar pelos tópicos em ordem de dificuldade, começando pelo mais fácil e chegando até o mais avançado.

Avaliando os Limites: Regra de L'Hôpital

Tempos atrás, muitos capítulos atrás, em uma galáxia muito distante, você estava estressado em relação aos limites. Desde então, você já viu muito mais com o que se estressar, então é hora de "desestressar" um pouco. Mal sabia você que enquanto se esforçava e aprendia as derivadas, também aprendia um excelente atalho para encontrar limites. Esse atalho (Regra de L'Hôpital) pode ser utilizado para encontrar limites que, depois da substituição, estão na forma indeterminada.

Ponto Crítico

A Regra de L'Hôpital só pode ser usada para calcular limites que são indeterminados (ou seja, o valor que não pode ser encontrado imediatamente). As formas indeterminadas mais comuns são $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $0 \cdot \infty$.

Para mostrar como é útil a Regra de L'Hôpital, vamos voltar rapidamente ao Capítulo 6 e lembrar de dois limites que não podíamos calcular manualmente. Esses dois limites compõem o próximo exemplo. O primeiro limite podíamos somente decorar (mas não podíamos justificar por nenhum dos métodos até então). Calculamos o segundo limite usando um pequeno truque (comparamos graus para os limites no infinito), mas esse método era só um truque. Não tínhamos prova ou justificativa. Finalmente, chegou a recompensa para os curiosos.

Regra de L'Hôpital: Se $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \to c} h(x)$ é uma forma indeterminada (por exemplo, $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$), então $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Em outras palavras, considere as derivadas do numerador e do denominador separadamente (não pela Regra do Quociente), e inclua c novamente para encontrar o limite.

Alerta do Kelley

Você só pode usar a Regra de L'Hôpital (que se pronuncia "lopital") se você tiver uma forma indeterminada após a substituição – não vai funcionar para outros limites mais comuns.

Exemplo 1: Calcule os dois limites usando a Regra de L'Hôpital:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Solução: Se você considerar $x = 0$, terá $\frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$, e $\frac{0}{0}$ está na forma indeterminada. Então, aplique a Regra de L'Hôpital considerando a derivada de sen x (que é o cos x) e a derivada de x (que é 1) e substitua essas partes por suas derivadas:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$

Agora a substituição não resultará em $\frac{0}{0}$. Na verdade, a substituição resultará em cos 0, que é igual a 1. Você aprendeu que 1 é a resposta no Capítulo 6, mas agora você sabe o porquê.

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x^2-7x+4}{2+x-6x^2+8x^3}$$

Solução: Se você inserir $x = \infty$ para todos os x, terá um número enorme em cima dividido por um número enorme embaixo $\frac{\infty}{\infty}$, que é uma forma indeterminada, então, aplique a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{15x^2+8x-7}{1-12x+24x^2}$$

Ops! A substituição *ainda* resulta em $\frac{\infty}{\infty}$. Mas não tema – continue aplicando a Regra de L'Hôpital até que a substituição chegue a uma resposta legítima:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{30x+8}{-12+48x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{30}{48}=\frac{30}{48}=\frac{5}{8}$$

Quando não houver mais x no problema $\left(\lim_{x\to\infty}\frac{30}{48}\right)$, nenhuma substituição é necessária, e a resposta cai como uma fruta madura.

Você Tem Problemas

Problema 1: Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(x^{-2}\cdot\ln x\right)$ usando a Regra de L'Hôpital. *Dica*: Comece escrevendo a expressão como uma fração.

Outros Teoremas de Existência

Há séculos o homem se esforça para definir a vida e para determinar o que, exatamente, define a existência. Descartes uma vez filosofou: "Penso, logo existo", sugerindo que o pensamento definia a existência. A maioria dos estudantes de cálculo dá um passo à frente, lamentando: "Estou em um estado de angústia mental, logo, estou no cálculo". Deixando a filosofia de lado, os próximos dois teoremas não procuram responder a questões tão profundas; eles simplesmente definem que algo existe, e já é o suficiente.

Ponto Crítico

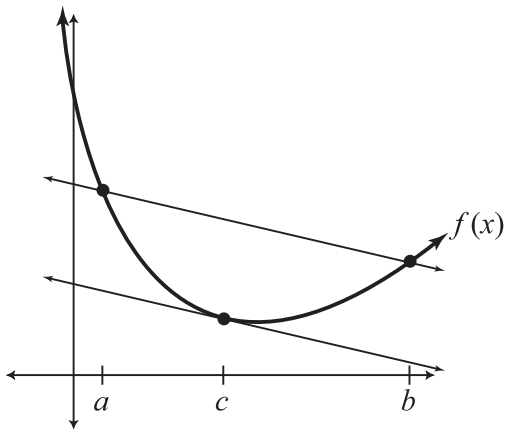
É chamado de Teorema do Valor Médio porque um grande componente é a taxa média de variação para a função.

Teorema do Valor Médio

Este belo teorema mostra uma relação explícita entre a taxa média de variação de uma função (ou seja, a inclinação de uma linha secante) e a taxa instantânea de variação da função (ou seja, a inclinação de uma linha tangente). Especificamente, ele garante que, em algum momento de um intervalo fechado, a linha tangente seja paralela à linha secante para aquele intervalo (veja a Figura 13.1).

Figura 13.1

Aqui, a linha secante é desenhada pela conexão dos pontos de extremidade do intervalo fechado [*a*,*b*]. Em *x* = c, que está naquele intervalo, a linha tangente é paralela à linha secante.



Ponto Crítico

O Teorema do Valor Médio faz sentido. Pense desta forma: se em uma viagem de carro de duas horas, você obteve a velocidade média de 80 quilômetros por hora, então (de acordo com o Teorema do Valor Médio), pelo menos uma vez durante a viagem seu velocímetro mostrou 80 km/h.

Matematicamente, linhas paralelas têm inclinações iguais. Assim, há sempre algum lugar no intervalo em que a função contínua se altera na mesma taxa em que se altera para o intervalo inteiro. Aqui está o teorema:

Teorema do Valor Médio: Se uma função $f(x)$ é contínua e diferenciável no intervalo fechado [a,b], então existe um ponto *c* entre *a* e *b*, como $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Em outras palavras, é garantido que um ponto *c* exista para que a derivada lá ($f'(c)$) seja igual à inclinação da linha secante para o intervalo [*a*,*b*] $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$.

Exemplo 2: Em que valor(es) de x no intervalo [–2,3] o gráfico de $f(x) = x^2 + 2x - 1$ satisfaz o Teorema do Valor Médio?

Solução: Em algum lugar, a derivada deve ser igual à inclinação da secante; então, comece encontrando a derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 2x + 2$$

Essa foi fácil. Agora, encontre a inclinação da secante no intervalo [–2,3]. Para calcular, primeiro insira –2 e 3 na função para chegar às extremidades da secante: (–2,–1) e (3,14):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - (-1)}{3 - (-2)} = \frac{15}{5} = 3$$

Assim, em algum ponto do intervalo, a derivada $f'(x) = 2x + 2$ e a inclinação da secante que você calculou devem ser iguais:

$$2x + 2 = 3$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Observe o gráfico de $f(x)$ na Figura 13.2 e verifique que a linha tangente em $x = \frac{1}{2}$ é paralela à linha secante que conecta (–2,–1) e (3,14).

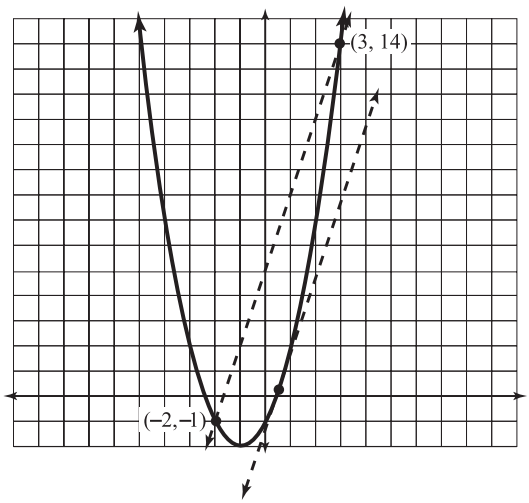


Figura 13.2

Inclinações de secante e tangente iguais resultam em linhas secante e tangente paralelas.

Você Tem Problemas

Problema 2: Dada a função $g(x) = \frac{1}{x}$, encontre o valor de x que satisfaça o Teorema do Valor Médio no intervalo $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

Teorema de Rolle

O Teorema de Rolle é um caso específico do Teorema do Valor Médio. Segundo ele, se a inclinação da linha secante de uma função for 0 (em outras palavras, a linha secante é horizontal porque as extremidades do intervalo estão localizadas exatamente à mesma altura no gráfico), então, em algum lugar desse intervalo, a inclinação da tangente também será 0. Já que você conhece o Teorema do Valor Médio, essa informação não é nova. Nosso teorema anterior garantia que as linhas teriam a mesma inclinação independentemente da inclinação na secante. Eis como o Teorema de Rolle é definido matematicamente:

Teorema de Rolle: Se uma função $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em um intervalo aberto (a,b), e $f(a) = f(b)$, então existe um c entre a e b, como $f'(c) = 0$.

Vamos provar isso com o Teorema do Valor Médio – que garante que a inclinação da secante será igual à inclinação da tangente em algum lugar em [a,b]. A inclinação da secante que conecta os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ é $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, mas como o teorema afirma que $f(a) = f(b)$, essa fração se torna $\frac{0}{b-a} = 0$. Assim, a inclinação da linha secante é 0. De acordo com o Teorema do Valor Médio, $f'(x)$ deve se igualar a 0 em algum lugar do intervalo, em um ponto que o Teorema de Rolle chama de c.

Taxas Relacionadas

Problemas de taxas relacionadas estão entre os mais populares (para os professores) e temidos (pelos alunos) em cálculo. Você sabe se um problema é de taxas relacionadas porque contém expressões como "qual é a velocidade... de mudança?". Basicamente, você deve descobrir com que velocidade uma variável em um problema está mudando se souber a velocidade com a qual uma outra variável se altera. Os problemas nunca são iguais, mas o procedimento é exatamente o mesmo para todos os problemas desse tipo – eles podem se tornar até divertidos depois que você tiver se acostumado com eles.

Vamos analisar um problema de taxas relacionadas clássico: o dilema de uma escada que escorrega pelo lado de uma casa. O único passo que se diferencia entre esse e qualquer outro problema de taxas relacionadas é o primeiro: encontrar uma equação que caracterize a situação. Depois de passar essa etapa, tudo é mais tranquilo.

Exemplo 3: Goofus e Gallant[1] estão pintando a minha casa. Enquanto Gallant posicionou corretamente sua escada de 8 m antes de subir, Goofus não fez o mesmo e, enquanto subia, ela escorregou pelo lado da casa a uma taxa constante de 0,1 m/s. Com que velocidade a base da escada escorrega horizontalmente para longe da casa quando o topo da escada está a 5 m de distância do chão?

1 Nota explicativa: Goofus e Gallant são personagens da revista americana *Highlights for Children*, lançada em 1946 e voltada para o público infantil.

Solução: Você sabe que esse é um problema de taxas relacionadas porque pergunta com que velocidade algo está mudando ou se movendo. Sempre começo fazendo um desenho da situação (veja a Figura 13.3).

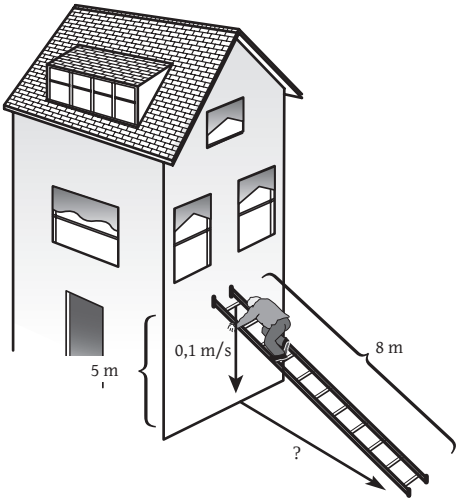


Figura 13.3

Receita para um desastre: a escada de 8 m, com o topo a apenas 5 m do chão, e Goofus heroicamente se apoiando nela.

Você precisa escolher uma equação que represente essa situação. Repare que a escada, a casa e o chão formam um triângulo retângulo; o problema dá informações sobre os comprimentos dos lados do triângulo retângulo. Assim, você deve usar o Teorema de Pitágoras como equação primária, já que relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Para ser mais fácil de visualizar, vou remover todas as informações extras:

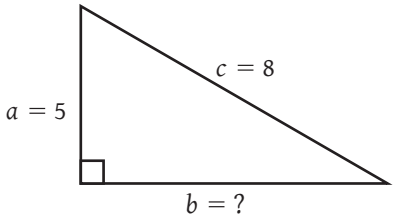


Figura 13.4

A situação de Goofus sem as ilustrações.

De acordo com a Figura 13.4 (e o Teorema de Pitágoras), você sabe que $a^2 + b^2 = c^2$. Cuidado: Não insira valores que conhece (como $a = 5$) até completar o próximo passo, que é a diferenciação de tudo que diz respeito a t:

$$2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt} = 2c\frac{dc}{dt}$$

Alerta do Kelley

Lembre-se de que você não vai usar o Teorema de Pitágoras para todos os problemas de taxas relacionadas. Você deverá escolher sua equação primária com base na situação. Veja o Problema 3 para um outro exemplo.

Alerta do Kelley

Se uma variável diminui em tamanho, a taxa que a acompanha deve ser negativa. No Exemplo 3, já que *a* está diminuindo a 0,1 m/s, $\frac{da}{dt} = -0{,}1$, não 0,1.

Você deve estar se perguntando: "O que significa $\frac{da}{dt}$?". Representa a velocidade com a qual *a* está mudando. O problema diz que a escada está caindo, então, o lado *a* está, na verdade, ficando menor à taxa de 0,1 m/s, então escreva $\frac{da}{dt} = -0{,}1$. Nesse momento, você não sabe quanto é $\frac{db}{dt}$, porque é isso que estamos procurando. Porém, você sabe que $\frac{dc}{dt} = 0$, porque *c* (o comprimento da escada) não vai mudar conforme ela escorrega. Na verdade, você pode até calcular $b = \sqrt{39}$ usando o Teorema de Pitágoras, sabendo que os outros lados do triângulo são 5 e 13. Então, insira tudo o que você sabe:

$$2 \cdot 5 \cdot (-0{,}1) + 2 \cdot \sqrt{39} \cdot \frac{db}{dt} = 2 \cdot 13 \cdot 0$$

Tudo o que você deve fazer é resolver por $\frac{db}{dt}$:

$$-1 + 2\sqrt{39}\frac{db}{dt} = 0$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{39}} \text{ m/s}$$

Alerta do Kelley

Se você estiver em dúvida sobre a origem dos $\frac{da}{dt}$'s e $\frac{db}{dt}$'s, olhe novamente o Capítulo 10.

Assim, *b* aumenta à taxa de $\frac{1}{2\sqrt{39}}$ m/s, e essa é a velocidade com que a base da escada está escorregando.

Aqui estão os passos para completar o problema de taxas relacionadas:

1. Construa uma equação contendo todas as variáveis necessárias;
2. Antes de colocar valores, diferencie toda a equação em relação ao *t*;
3. Insira valores para todas as variáveis, menos aquela pela qual você estiver resolvendo;
4. Encontre a variável desconhecida.

Você Tem Problemas

Problema 3: Você já tinha ouvido falar que não era boa ideia comprar bichos de estimação em lojas pequenas, mas não resistiu e comprou um pequeno filhote de cubo. Bem, após três meses, ele começou a crescer. Na verdade, seu volume está crescendo à taxa constante de 5 centímetros cúbicos por semana. Com que velocidade a área de sua superfície cresce quando um de seus lados mede 10 centímetros?

Otimização

Embora a otimização seja (discutivelmente) a mais temida de todas as aplicações de diferenciais, nunca entendi o motivo. Quando você procura o maior ou menor tamanho que algo pode ter (ou seja, a otimização), tudo que se deve fazer é criar uma fórmula para representar essa quantidade e, então, encontrar o extremo relativo usando gráficos. Você já vem fazendo isso há algum tempo, então, não se desespere sem necessidade. Para explorar a otimização, vamos novamente examinar o clássico problema de cálculo que assombra alunos como você há anos.

Exemplo 4: Se você fizer uma caixa cortando quadrados congruentes das extremidades de um pedaço de papel medindo 11 por 14 centímetros, dê as dimensões da caixa com o máximo volume possível (considerando que a caixa não tem tampa).

Solução: Lá no Capítulo 1, dei uma dica sobre como fazer uma caixa com um pedaço de papel. Tente fazer isso. Coloque uma folha retangular de papel na sua frente e corte quadrados congruentes pelas pontas. Você terá retângulos menores na lateral do papel. Dobre-os em direção a você, junto com as pontas criadas pelos lados interiores dos quadrados que você acabou de remover. Consegue ver como os retângulos que sobraram correspondem às dimensões da caixa (veja a Figura 13.5)?

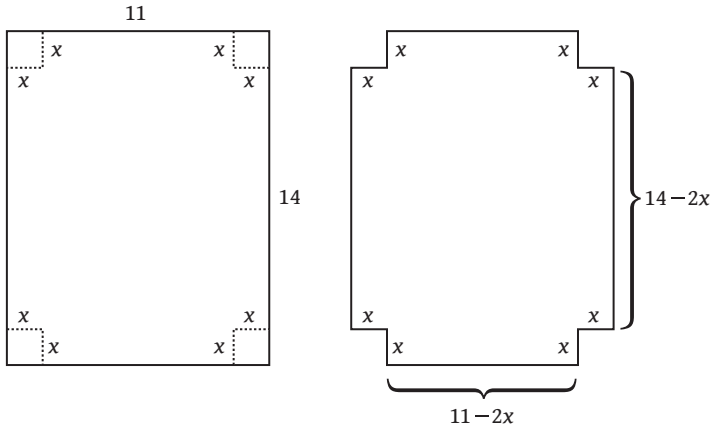


Figura 13.5

A altura da caixa será de x centímetros, já que o comprimento dos quadrados cortados determina qual a profundidade para dobrar o papel.

Marquei os lados dos quadrados laterais como x na Figura 13.5. Após cortar os quadrados, o comprimento da parte de cima e de baixo é $11 - 2x$, já que havia 11 centímetros e você removeu dois comprimentos, cada um medindo x centímetros. Da mesma forma, os lados da caixa medem $14 - 2x$ centímetros.

Agora que você tem uma boa ideia do que está acontecendo visualmente, vamos entrar no mundo da matemática. Você está tentando encontrar o maior volume possível, então, sua equação primária deve ser pelo volume da caixa. O volume de qualquer caixa como essa é $V = l \cdot w \cdot h$, sendo que l = comprimento, w = largura e h = altura. Coloque os valores corretos para l, w e h.

$$V = (14 - 2x)(11 - 2x)x$$
$$V = 4x^3 - 50x^2 + 154x$$

Alerta do Kelley

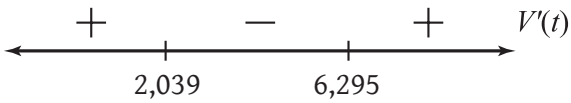
Enquanto você insere as variáveis na equação primária, seu objetivo deve ser o de ter somente uma variável principal. No Exemplo 4, você muda l, w e h, então todas contêm somente uma variável *x*. Não se preocupe se *V* é uma variável – você não precisa mexer no lado esquerdo da equação.

Se você inserir qualquer *x*, essa função resulta no volume da caixa gerada quando quadrados de lado *x* são retirados. Legal, né? Você quer encontrar o valor de *x* que faz com que *V* seja o maior, então, encontre o valor garantido pelo Teorema do Valor Extremo (ou Teorema de Weierstrass). Pegue a derivada com relação a *x* e faça um gráfico (veja a Figura 13.6), assim como fez no Capítulo 11.

$$V' = 12x^2 - 100x + 154 = 0$$
$$6x^2 - 50x + 77 = 0$$

Figura 13.6

O gráfico para *V'*. Um máximo relativo ocorre em *x* = 2,039.



Embora *x* = 6,295 pareça ser mínimo, a resposta não faz sentido (veja o Alerta do Kelley). O volume máximo é atingido quando *x* = 2,039 (porque V muda de positivo para negativo, o que significa que V para de crescer e começa a decrescer, então, as dimensões ótimas são 2,039 centímetros por 6,922 centímetros por 9,922 centímetros (*x*, 11 – 2*x*, e 14 – 2*x*, respectivamente).

Alerta do Kelley

No Exemplo 4, considere somente valores de *x* entre 0 e 5,5. Por quê? Bem, se *x* for menor que 0, você não está removendo nenhum quadrado, e se *x* for maior que 5,5, então a largura (11 – 2*x*) da sua caixa se torna 0 ou menor, e isso não é possível. Uma caixa de verdade deve ter alguma largura.

Eis os passos para otimizar funções:

1. Encontre uma equação com uma variável que represente o que você está tentando maximizar.
2. Encontre a derivada que diz respeito à variável no problema e desenhe um gráfico.
3. Verifique suas soluções como o tipo correto de extremo (máximo ou mínimo) visualizando as mudanças de sinal no gráfico.

Você Tem Problemas

Problema 4: Qual é o produto mínimo que você pode conseguir de dois números reais caso um deles seja três menos que duas vezes o outro?

O Mínimo que Você Deve Saber

- A Regra de L'Hôpital é um atalho para encontrar limites que são indeterminados quando você tenta resolvê-los com uma substituição.
- O Teorema do Valor Médio garante que a inclinação da secante em um intervalo vá se igualar à inclinação da tangente em algum lugar desse intervalo – ou seja, a taxa média de variação deve, em algum lugar, ser igual à taxa instantânea de variação.
- Você pode determinar a velocidade com a qual uma variável muda em uma equação se souber a velocidade com a qual as outras variáveis da equação estão mudando.
- A primeira derivada pode ajudar a determinar onde uma função alcança seus valores ótimos.

Parte 4 A Integral

Aqueles de vocês que têm uma boa bagagem a respeito de super-heróis (ou Seinfeld) saberão o que quero dizer quando digo "Planeta Bizarro". Neste mundo, tudo é o oposto do nosso mundo; o bem significa o mal, para cima quer dizer para baixo, direita é esquerda. O super-homem do nosso mundo é esperto, enquanto o super-homem de Bizarro é meio burro. Bem, as integrais são as derivadas de Bizarro. A derivação nos leva de uma função a uma expressão que descreve sua taxa de variação, mas a integração vai na direção oposta – da taxa de variação para a função original.

Ainda que integração seja simplesmente o oposto de derivação, você pode pensar que a sua utilidade é meio limitada. Mas está errado. Há tantas aplicações para integrais quanto para derivadas, mas a natureza delas é completamente diferente. Em vez de encontrar taxas de variação, vamos calcular área, volume e distância percorrida. Também vamos explorar o Teorema Fundamental do Cálculo, que explica a relação exata entre integrais e a área abaixo de uma curva. É surpreendente como essa relação é direta e pode ser útil.

Capítulo 14

Aproximando Áreas

Neste Capítulo

- Usando retângulos para aproximar áreas
- Soma à direita, à esquerda e soma média
- Aproximação trapezoidal
- Aproximação parabólica com a Regra de Simpson

Você já viu o filme *Velocidade Máxima*, com Keanu Reeves e Sandra Bullock? Se não viu, vamos resumir. Estão todos presos em um ônibus que vai explodir se o velocímetro marcar abaixo de 80 km/h. Então, você tem um assassino e um ônibus desgovernado pela cidade que não pode parar – o cenário perfeito para destruição, desastre, drama, desordem e um romance entre as duas estrelas do filme (Que droga! Esse Keanu... sempre no lugar certo e na hora certa...).

Agora você já deve estar se sentindo como se estivesse dentro desse ônibus. O cálculo correndo ao seu redor, desgovernado, sem diminuir a velocidade, sem parar e (infelizmente) sem nenhuma estrela de cinema. Quanto mais você aprende sobre as derivadas, mais precisa se lembrar das coisas que a precedem. Quando você finalmente entende algo, outro assunto (aparentemente sem relação com o último) surge para confundir você. Quando é que esse ônibus vai diminuir a velocidade? Bem, a velocidade diminui neste exato momento.

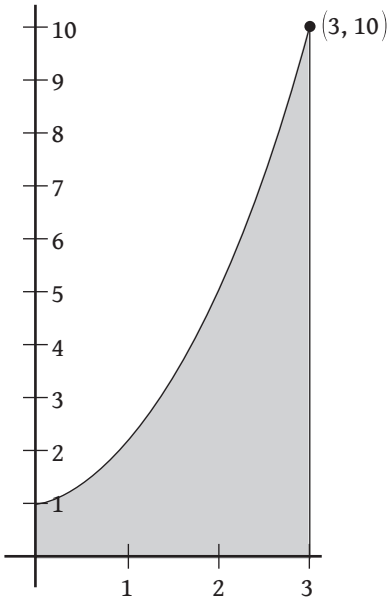
Pode ser que você sinta um leve desconforto estomacal ao pararmos de repente para discutir algo completamente diferente. Até agora, passamos muito tempo falando em taxas de variação e inclinação de tangente. Isso já era. Agora, vamos começar a falar de áreas sob curvas. Sei que é uma mudança e tanto, mas tudo vai se encontrar no final. Por enquanto, respire bem fundo e aproveite um passo mais lento por alguns capítulos, pois vamos falar de algo diferente. E se encontrar a Sandra Bullock, diga "oi" por mim.

Somas de Riemann

Vou começar dizendo algo profundamente filosófico. As curvas são mesmo curvilíneas. E é essa inerente curvatura que torna tão difícil encontrar a área abaixo delas. Por exemplo, dê uma olhada no gráfico de $y = x^2 + 1$ na Figura 14.1 (apenas o intervalo [0,3] é apresentado).

Figura 14.1

Se a região sombreada de $y = x^2 + 1$ e o eixo x fossem um quadrado ou um retângulo, seria muito mais fácil determinar a área.



Queremos tentar e descobrir a área do espaço sombreado. Não temos nenhuma fórmula geométrica que nos ajude a encontrar a área de uma figura curva, então vamos ter que criar novas técnicas. Para começar, vamos aproximar a área usando figuras cujas áreas já possuem fórmulas. Ainda que pareça meio manjado, vamos aproximar a área sombreada usando retângulos. Esse processo de usar retângulos para aproximar uma área se chama *soma de Riemann*.

de•fi•ni•ção

A **soma de Riemann** é uma aproximação de uma área calculada por meio de retângulos. Estamos usando somas de Riemann bem simples. Alguns cursos de cálculo exploram somas bem complicadas que envolvem fórmulas malucas com notação sigma (Σ). Isso está um pouco além de nós e não ajuda nada no entendimento de conceitos de cálculo, então vou omiti-las.

Soma à Direita e à Esquerda

Vou aproximar aquela área sombreada abaixo de $y = x^2 + 1$ usando três retângulos. Como estou apenas encontrando a área no intervalo de x [0,3], isso significa que vou usar três retângulos de largura 1 (se eu estivesse usando seis retângulos em um intervalo de 3, cada retângulo teria largura ½). Qual deve ser a altura de cada retângulo? Bem, eu escolho usar a *soma à direita*, o que quer dizer que os retângulos terão a altura que a função alcança ao lado direito de cada intervalo, como mostra a Figura 14.2.

Ponto Crítico

Quando digo que estamos tentando determinar a área abaixo da curva, eu quero dizer, na verdade, a área entre a curva e o eixo de x; do contrário, a área abaixo de uma curva seria quase sempre infinita. Você pode sempre assumir que vai determinar a área entre a curva e o eixo de x, a menos que o problema lhe diga outra coisa.

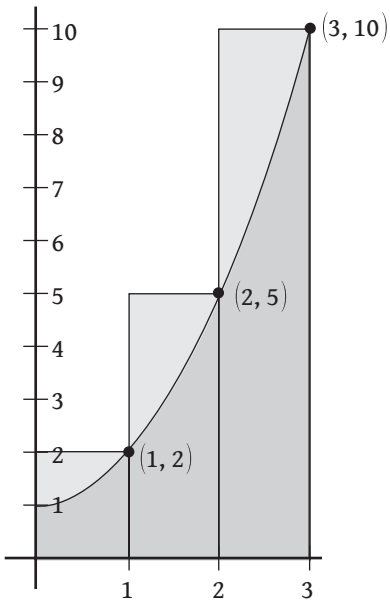


Figura 14.2

Estou usando três retângulos para aproximar a área em [0,3]. Os três retângulos cobrem os intervalos [0,1], [1,2] e [2,3].

O retângulo em [0,1] terá a altura do lado direito do intervalo ($x = 1$), que é 2. Similarmente, o segundo retângulo tem altura 5, já que é a altura da função em $x = 2$, o lado direito do seu intervalo. Assim, as alturas dos retângulos são 2, 5 e 10, da esquerda para a direita. A largura de cada retângulo é 1.

Podemos aproximar a área abaixo da curva somando as áreas dos três retângulos. Como a área de um retângulo é igual à largura vezes o comprimento, a área total capturada por eles é $1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = 17$. Assim, a aproximação direita de Riemann com $n = 3$ retângulos é 17.

Ponto Crítico

Foi fácil ver que a largura de cada retângulo em nossa soma à direita era 1. Se a largura não for tão óbvia, use a fórmula da largura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ para calculá-la. Com essa fórmula, o intervalo $[a,b]$ vira n retângulos diferentes, e cada um terá largura Δx. No nosso exemplo de soma à direita, $\Delta x = \frac{3-0}{3} = 1$, já que transformamos o intervalo [0,3] em $n = 3$ retângulos.

de•fi•ni•ção

O tipo de soma que você calcula depende da altura dos seus retângulos. Se você usar a altura de cada limite esquerdo, você terá **somas à esquerda**. Se você usar a altura no limite direito de cada retângulo, o resultado será **somas à direita**. Obviamente, **somas médias** usam a altura alcançada pela função no meio de cada intervalo.

Claramente, a área que os retângulos abrangem é maior do que o que há abaixo da curva. Na verdade, parece ser bem maior. Isso serve para lhe mostrar que depois terá de arrumar métodos melhores (e, de fato, faremos isso). Por enquanto, vamos encarar o mesmo problema de área, mas desta vez usaremos quatro retângulos e *somas à esquerda*.

Exemplo 1: Aproxime a área abaixo da curva $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo [0,3] usando uma soma de Riemann à esquerda com quatro retângulos.

Solução: Para encontrar o tamanho de cada um dos quatro retângulos, use a fórmula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$\Delta x = \frac{3-0}{4} = \frac{3}{4}$$

Se cada um dos quatro intervalos tiver $\frac{3}{4}$ de largura e os retângulos começarem em 0, então eles serão definidos pelos intervalos $\left[0, \frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right]$, e $\left[\frac{9}{4}, 3\right]$. (Isso porque $0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ etc.). Você vai usar alturas alcançadas pela função à esquerda de cada intervalo. Assim, as alturas serão $f(0)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, e $f\left(\frac{9}{4}\right)$, como ilustrado na Figura 14.3.

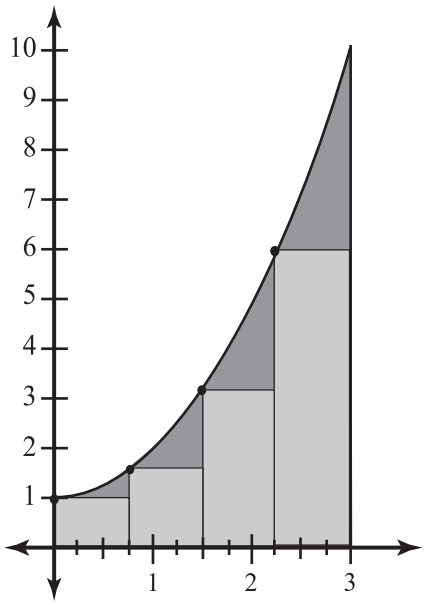


Figura 14.3

Cada um dos quatro retângulos tem $\frac{3}{4}$ de largura e tem a altura da função $f(x) = x^2 + 1$ à esquerda. Por conseguinte, temos somas à esquerda.

A área de cada retângulo é igual à sua largura vezes a sua altura, então a área total é:

$$\frac{3}{4}\cdot f(0)+\frac{3}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{4}\cdot f\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot\frac{25}{16}+\frac{3}{4}\cdot\frac{13}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{97}{16}=\frac{285}{32}\approx 8{,}906$$

Esse número subestima a área real abaixo da curva, já que porções grandes dessa área não foram abrangidas pelos nossos retângulos.

Soma Média

A soma média é bem parecida com as somas à direta e à esquerda. A única diferença (você já adivinhou, né) é a forma como você define a altura dos retângulos. Digamos que, em nosso exemplo de $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo de x [0,3], queiramos calcular a soma média usando (para facilitar) $n = 3$ retângulos. Como antes, os intervalos que definem as extremidades dos retângulos serão [0,1], [1,2] e [2,3], sendo que cada retângulo terá 1 de largura. Mas e as alturas?

Observe o intervalo [0,1]. Se usarmos soma à esquerda, a altura do retângulo será $f(0)$. Usando soma à direita, será $f(1)$. Mas nós estamos usando soma média, então você usa o valor da função no *ponto central* do intervalo, que nesse caso é $\frac{1}{2}$.

Assim, a altura do retângulo é $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Se você aplicar isso aos três intervalos, a soma média de Riemann para aproximar a área será:

$$1 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{47}{4} = 11{,}75$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Aproxime a área abaixo da curva $g(x) = -\cos x$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ usando $n = 4$ retângulos e (1) soma à esquerda, (2) soma à direita e (3) soma média.

Regra do Trapézio

Infelizmente, a menos que você use uma tonelada de retângulos, a soma de Riemann não é assim tão precisa. A regra do trapézio, no entanto, é bem mais precisa para aproximar áreas abaixo de curvas. Em vez de construir retângulos, esse método usa trapézios. Aliás, esses trapézios se parecem com seus amiguinhos retângulos na base, mas são diferentes no topo. Para construir trapézios, você marca a altura da função no início e no fim do intervalo (que ainda é calculado pela fórmula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$) e conecta esses dois pontos. A Figura 14.4 mostra como a regra do trapézio aproxima a área abaixo da nossa função preferida de todo o mundo, $y = x^2 + 1$.

Tem muito menos espaço para erros com essa regra, e é tão fácil de se aplicar quanto a soma de Riemann. Uma diferença: esta requer que você decore uma fórmula.

Ponto Crítico

Se você estiver morrendo de vontade de saber a área exata abaixo de $y = x^2 + 1$ no intervalo [0,3], é 12. De todas as nossas aproximações, a soma média chegou mais perto (ainda que a gente tenha usado apenas três retângulos nesse método e quatro com a soma à esquerda).

Ponto Crítico

Isso vai te deixar histérico. Lembra como as somas à esquerda e à direita se equiparam quando se trata de aproximar uma área abaixo de $y = x^2 + 1$ – uma muito alta, outra muito baixa? Bem, a regra do trapézio (com n trapézios) é exatamente a média das somas à esquerda e à direita (com n retângulos). Já sabemos que a soma à direita de $y = x^2 + 1$ (com $n = 3$) é 17. Você consegue dizer que a soma à esquerda correspondente é 7. Se você calcular a aproximação da regra do trapézio (com $n = 3$ trapézios), você chega a 12, que é o ponto central entre 7 e 17.

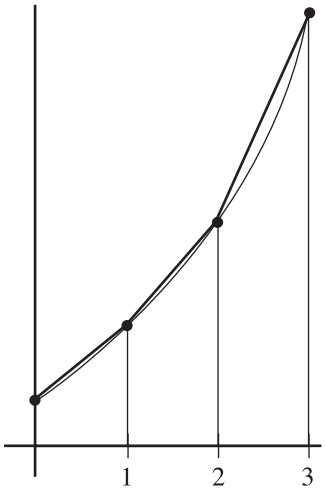


Figura 14.4

Os "topos" de nossas formas de aproximação não são mais paralelos ao eixo *x*. Agora, eles conectam as alturas da função nos pontos finais dos intervalos.

A Regra do Trapézio: A área aproximada abaixo de uma curva contínua $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ usando n trapézios é igual a:

$$\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(b)\right)$$

Na prática, você coloca os números certos na fração no começo e, então, avalia a função em todos os seus limites de intervalo. Com exceção dos pontos finais, você multiplicará todos os valores por 2.

A área de qualquer trapézio é a metade da altura vezes a soma das bases (que são os lados paralelos). Para o trapézio da Figura 14.5, a área é $\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$. Talvez você não esteja acostumado a ver trapézios inclinados nos lados assim – em geometria, as bases são geralmente horizontais, não verticais. A razão de você ver esses dois tipos na regra do trapézio é que cada base é usada duas vezes para trapézios consecutivos, exceto para bases em pontos finais.

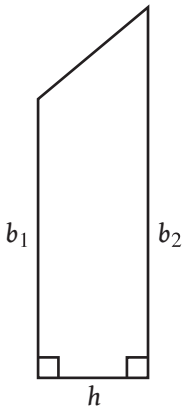
Vamos direto para um exemplo, e você verá que a regra do trapézio não é nada difícil. Só para ficar divertido, vamos usar $f(x) = x^2 + 1$ mais uma vez para ver se a regra do trapézio pode bater a nossa atual melhor estimativa de 11,75, encontrada através da soma média.

Ponto Crítico

Há uma outra forma de conseguir aproximações melhores usando a soma de Riemann. Se você aumentar o número de retângulos, a probabilidade de erro diminui. Porém, a quantidade de cálculos vai aumentar. No fim, vamos encontrar um jeito de obter a área exata sem muito trabalho. Tem a ver com a soma de Riemann, mas usa um número infinito de retângulos para eliminar completamente qualquer erro.

Figura 14.5

Nossa aproximação por trapézios é feita com trapézios empurrados uns contra os outros de bases $b1$ e $b2$ e altura h.



Alerta do Kelley

Ainda que a fórmula da regra do trapézio contenha a expressão $\frac{b-a}{2n}$, você ainda usa a fórmula $\frac{b-a}{n}$ para encontrar a largura dos trapézios. Não confunda essas fórmulas – elas são diferentes.

Exemplo 2: Aproxime a área abaixo de $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[0,3]$ usando a regra do trapézio com $n = 5$ trapézios.

Solução: Como você está usando 5 trapézios, precisa determinar o tamanho deles, então use a fórmula Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{5} = \frac{3}{5}$$

Assim, os limites dos intervalos começarão em $x = 0$ e progredirão para $\frac{3}{5}$: 0, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{5}$, e 3. Esses números entram na fórmula como a, $x1$, $x2$, $x3$, $x4$ e b. Então, de acordo com a regra do trapézio, a área é aproximadamente:

$$\frac{3-0}{2(5)}\left(f(0)+2f\left(\frac{3}{5}\right)+2f\left(\frac{6}{5}\right)+2f\left(\frac{9}{5}\right)+2f\left(\frac{12}{5}\right)+f(3)\right)$$

$$=\frac{3}{10}\left(1+2\cdot\frac{34}{25}+2\cdot\frac{61}{25}+2\cdot\frac{106}{25}+2\cdot\frac{169}{25}+10\right)$$

$$=\frac{609}{50}=12{,}18$$

Essa é a aproximação mais próxima até agora, embora seja um pouco grande demais. Se essa curva fosse côncava para baixo em vez de para cima, o resultado teria subestimado a área. Você consegue entender por quê? O errinho seria do lado de fora da curva, e não dentro.

Você Tem Problemas

Problema 2: Aproxime a área abaixo de $y = \text{sen } x$ no intervalo $[0,\pi]$ usando a regra do trapézio com $n = 4$ trapézios.

Regra de Simpson

A nossa ferramenta final para aproximação de áreas é a regra de Simpson. Geometricamente, ela produz pequenas parábolas (e não telhados inclinados com trapézios) para abranger ainda mais a função que estamos aproximando. A fórmula é ridiculamente parecida com a da regra do trapézio, mas há uma condição: você só pode usar um número par de subintervalos.

A Regra de Simpson: A área aproximada abaixo da curva contínua $f(x)$ no intervalo fechado $[a,b]$ usando um número par de subintervalos, n, é:

$$\frac{b-a}{3n}\left(f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(b)\right)$$

Nessa fórmula, os termos mais externos são multiplicados por nada. Porém, a começar pelo segundo termo, você multiplica termos consecutivos por 4, depois por 2, depois por 4, depois por 2, e assim por diante. Mas comece sempre com 4. De volta à nossa boa e velha $f(x) = x^2 + 1$ para outro exemplo.

Exemplo 3: Aproxime a área abaixo da função $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo fechado $[0,3]$ usando a regra de Simpson e $n = 6$ subintervalos.

Solução: Alguns cálculos rápidos mostram que nossos subintervalos têm a largura de $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$. Agora, com a fórmula temos:

$$\frac{b-a}{3n}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(1)+4f\left(\frac{3}{2}\right)+2f(2)+4f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)\right)$$

Lembre-se de multiplicar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ por 4, o termo seguinte por 2 e assim por diante. O primeiro e o último termo, porém, não têm coeficiente adicional.

$$\frac{3-0}{3\cdot 6}\left(1+4\cdot\frac{5}{4}+2\cdot 2+4\cdot\frac{13}{4}+2\cdot 5+4\cdot\frac{29}{4}+10\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+5+4+13+10+29+10\right)=12$$

Nossa! Como a regra de Simpson usa aproximações quadráticas e essa função é quadrática, você chega à resposta exata. Mas isso só acontece com áreas abaixo de funções quadráticas.

Você Tem Problemas

Problema 3: Aproxime a área abaixo de $y = \frac{1}{x}$ no intervalo [1,5] usando a regra de Simpson com $n = 4$ subintervalos.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- As somas de Riemann usam retângulos para aproximar a área abaixo de uma curva; as alturas desses retângulos são baseadas na altura da função à esquerda, à direita ou no ponto central de cada subintervalo.
- O tamanho de cada intervalo em todas as técnicas de aproximação é $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- A Regra do Trapézio é a média das somas à esquerda e à direita, e geralmente faz uma aproximação melhor do que cada uma individualmente.
- A Regra de Simpson usa intervalos com parábolas para aproximar áreas; assim, determina a área exata abaixo de funções quadráticas.

Capítulo 15

Antiderivadas

Neste Capítulo

- Encontrando a antiderivada de expressões
- A regra da potência para integração
- Integração de funções trigonométricas
- O Teorema Fundamental: conexão com área
- A chave para a substituição *u*

Está perplexo? Bem, é provável, já que passamos os 13 primeiros capítulos do livro discutindo procedimentos matemáticos complexos e, de repente e sem aviso, começamos a calcular a área de retângulos no Capítulo 14. Uma desilusão. A maioria das pessoas tem essa visão terrível do cálculo, e assume que é impossível entender tudo que ele envolve; em geral, essas pessoas ficam surpresas por estarem calculando áreas simples a esta altura do curso.

Neste capítulo, vamos encontrar áreas exatas abaixo de curvas. Vamos também descobrir uma das relações matemáticas mais fascinantes de todos os tempos: a área debaixo de uma curva se relaciona à antiderivada da curva. É isso mesmo que você leu! Antiderivada. Depois de todo esse tempo aprendendo a encontrar a derivada de uma função, vamos voltar e encontrar a antiderivada. Antes, nós pegamos $f(x) = x^3 - 2x^2$ e chegamos a $f'(x) = 3x^2 - 4x$; agora, vamos começar com a derivada e descobrir a função original.

É um jogo totalmente novo, e vamos aprender tudo que vimos na primeira metade do curso ao contrário. Para aqueles de nós que sempre parecem fazer tudo ao contrário, essa deveria ser uma mudança bem-vinda! Soa animador? Ou dolorido? Bem, um pouco de cada.

A Regra da Potência para Integração

Antes de começarmos, vamos falar um pouco sobre diferenciação inversa. O processo de ir da expressão $f'(x)$ de volta para $f(x)$ é chamado de *antidiferenciação* ou *integração* – as duas significam a mesma coisa. O resultado do processo é chamado de *antiderivada* ou *integral*. A integração é representada com uma letra "*s*" longa e esticada, assim:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Lê-se "a integral de $2x$, em relação a x, é igual a x^2 mais outra constante desconhecida" (a *constante da integral*). Essa expressão integral é chamada de *integral indefinida*, pois não há limites, enquanto uma expressão como $\int_1^3 2x\,dx$ é chamada de *integral definida* porque contém os *limites da integral* 1 e 3. Ambas as expressões contêm um "dx"; não se preocupe – você não precisa fazer nada com isso. Só se assegure de que a sua variável bata com a variável da função (nesse caso, x).

de•fi•ni•ção

O oposto de uma derivada é chamado de **antiderivada** ou **integral**. Se $f(x)$ for a antiderivada de $g(x)$, então $\int g(x)dx = f(x) + C$. O processo de criar uma expressão como essa é chamado de **antidiferenciação** ou **integração**. Por que você tem que usar uma **constante de integração**? Muitas funções têm a mesma derivada, por exemplo, $h(x) = x^3 + 6$ e $j(x) = x^3 - 12$ têm a mesma derivada, $3x^2$. Assim, quando calculamos a integral $\int 3x^2 dx$, dizemos que a antiderivada é $x^3 + C$, pois não tem como saber que constante estava na função original. É por isso que todas as integrais indefinidas devem conter um "+ C" em sua solução. Uma **integral indefinida** não tem limite para o sinal da integração. A solução é uma antiderivada. Uma **integral definida** tem limites, chamados **limites da integração**, para o sinal da integração. A solução é um número real. Por exemplo, $\int 2x\,dx = x^2 + C$, mas $\int_1^3 2x\,dx = 8$. (Você vai aprender esses dois procedimentos em breve).

Por enquanto, chega de vocabulário. Antes de ficar alarmado, vamos ao que interessa na matemática. Lembra-se de como era encontrar derivadas simples com a regra da potência? Há uma maneira de encontrar integrais simples usando a *regra da potência para integração*. Em vez de multiplicar o coeficiente original pelo

expoente e então subtrair 1 da potência, você vai somar 1 à potência e dividir pela nova potência.

A *Regra da Potência para Integração*: A integral de uma única variável elevada a alguma potência é encontrada somando-se 1 ao expoente existente e dividindo a variável pelo novo expoente:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ para } n \neq -1$$

Lembre-se: você só pode usar a regra da potência para integração se for encontrar a integral de uma única variável elevada a uma potência, como na regra da potência normal. Porém, se a única coisa no seu caminho for um coeficiente, você pode arrancá-lo da integral para fazer as coisas do seu jeito, como no primeiro exemplo.

Ponto Crítico

De acordo com a regra da potência para integração, a integral de uma constante é um termo linear: $\int 8\,dx = 8x + C$. Coloque uma variável no número e pronto.

Exemplo 1: Avalie $\int \left(7x^3 + 6x^5\right) dx$.

Solução: Ainda que haja dois termos, cada um é uma variável elevada a alguma potência com um coeficiente anexo. Você pode separar problemas de adição ou subtração em integrais distintas:

$$\int 7x^3 dx + \int 6x^5 dx$$

Não se preocupe com o $\int$ ou o *dx* no problema. Eles são o alicerce de uma expressão integral, marcando onde começa e onde termina; integre tudo o que houver entre eles. Antes de aplicar a regra da potência para integração, você deve tirar o coeficiente: $7\int x^3 dx + 6\int x^5 dx$.

Ponto Crítico

Você tira os coeficientes das integrais para tornar a integração mais fácil. Assim que o sinal da integração sai de cena, você acaba multiplicando o coeficiente pela integral mesmo assim, então não é como se ele "fosse embora" para algum lugar. Ele simplesmente fica por aí, esperando que a integração esteja pronta.

Agora, a expressão de cada integral se parece com a do teorema da regra da potência para integração. Some 1 a cada potência e divida cada variável por sua nova potência. O sinal da integral e o "*dx*" vão desaparecer, mas não se esqueça de adicionar "+ C" no final do problema, já que todas as integrais indefinidas pedem isso:

$$7 \cdot \frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^6}{6} + C$$

$$\frac{7}{4}x^4 + x^6 + C$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Avalie $\int\left(2x^4+\frac{x^3}{3}+\sqrt{x}\right)dx$.

Integração de Funções Trigonométricas

Assim como com as derivadas trigonométricas, aprender integrais trigonométricas significa memorizar as fórmulas certas. Se você as esquecer, você pode criar algumas delas do zero facilmente (como a integral da função tangencial, como vamos ver mais adiante no capítulo). No entanto, nem todas são fáceis de construir, então posso prever alguns momentos de decoreba em seu futuro próximo.

Posso ver em seu olhar triste que pensar em memorizar mais coisas não o deixa nada feliz (e você vai ficar mais triste ainda se não tiver se entendido com as fórmulas reais ainda... elas têm um visual maluco). Pense no passado. Você teve que memorizar as tabuadas no ensino fundamental, não teve? Isso agora é como um tipo de avô das tabuadas, mas tão importante quanto.

E agora, sem mais delongas, aqui estão as funções trigonométricas e suas antiderivadas:

- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$
- $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

Ponto Crítico

Todas as integrais da lista que contêm uma função "co-" são negativas.

Há diversas funções logarítmicas naturais na lista das integrais trigonométricas. Isso ocorre porque $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, uma outra fórmula importante que deve ser memorizada.

E aqui vai mais uma, enquanto ainda estamos nisso: a integral de e^x é ela própria, assim como foi sua própria derivada; assim, $\int e^x dx = e^x + C$. Calcular a integral de funções logarítmicas é muito traiçoeiro,

então não vamos nem tentar até o Capítulo 18. Assim, você terá algo pelo que esperar ansiosamente (ou temer; faça a sua escolha!).

Teorema Fundamental do Cálculo

Finalmente, é hora de desvendar dois mistérios recentes: (1) como encontrar áreas exatas abaixo de curvas, e (2) por que afinal estamos falando de áreas – este capítulo não é sobre integrais? Acontece que a área exata abaixo de uma curva pode ser computada usando uma integral definida. Essa é uma das duas conclusões mais importantes, que, juntas, formam o Teorema Fundamental.

Parte I: Áreas e Integrais Relacionadas

Depois de todo o tempo que passamos aproximando áreas no capítulo 14, finalmente vamos calcular a área exata abaixo de $y = x^2 + 1$ no intervalo [0,3].

De agora em diante, vamos equacionar integrais definidas com a área abaixo da curva (tecnicamente, a área entre a função e o eixo de x, lembra?). Assim, eu posso dizer que a área abaixo de $x^2 + 1$ no intervalo [0,3] é igual a $\int_0^3 (x^2 + 1)dx$. Lê-se nessa nova notação "a integral de $x^2 + 1$, em relação a x, de 0 a 3". Diferente das integrais indefinidas, a solução para uma integral definida como essa é um número. Esse número é, na verdade, a área abaixo da curva. "Mas como é que eu faço para chegar a esse número?", você pergunta. Que tal darmos as boas-vindas ao Teorema Fundamental?

O Teorema Fundamental do Cálculo (*parte um*): Se $g(x)$ é a antiderivada da função contínua $f(x)$, então $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

Em outras palavras, para calcular a área abaixo da curva $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, você precisa antes integrar a função. Então, substitua o limite superior (b) na integral. Subtraia desse valor o resultado a que você chega substituindo o limite inferior (a) na mesma integral. É um processo brilhantemente simples, e tão poderoso quanto elegante.

Ponto Crítico

Você vai chegar a uma resposta negativa com a integral definida se a área em questão estiver abaixo do eixo x. Como o conceito da "área negativa" pode não fazer sentido para você, você vai automaticamente designar toda a área abaixo do eixo x com um valor negativo.

Exemplo 2: De uma vez por todas, encontre a área exata abaixo da curva $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo [0,3] usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Solução: Esse problema pede que você avalie a integral:

$$\int_0^3 (x^2 + 1)dx$$

Ponto Crítico

Aqui estão duas propriedades importantes das integrais definidas:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ (se os limites superior e inferior da integração forem iguais, a integral definida é igual a 0).
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (você pode trocar os limites da integração se quiser – só coloque um sinal negativo na frente e está tudo certo).

Comece calculando a integral de $x^2 + 1$ usando a regra da potência para integração. Quando você completa a integral, você não escreve mais o símbolo da integração, e não escreve "+ C". Em vez disso, desenhe um travessão vertical à direita da integral e copie os limites da integração. Isso significa que a porção da integração do problema está feita:

$$\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3$$

Coloque 3 na função (para substituir ambos os *x*) e subtraia a substituição por 0 na função:

$$\left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right) = 9 + 3 = 12$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Calcule $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\, dx$. Explique o que a resposta significa.

Parte II: Derivadas e Integrais São Opostas

Desculpe, mas eu já estraguei esta revelação para você. No entanto, a segunda maior conclusão do Teorema Fundamental ainda guarda algumas surpresas. Vamos dar uma olhada no teorema antes:

O Teorema Fundamental do Cálculo (parte dois): Se $f(x)$ é uma função contínua e diferenciável, $\frac{d}{dx}\left(\int_a^{f(x)} g(y)dy\right) = g\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$, se *a* for um número real.

Desagradável, não? Aqui está o seu significado sem todos esses termos matemáticos. Digamos que você esteja determinando a derivada de uma integral definida cujo limite mais baixo seja uma constante (um número qualquer) e cujo limite mais alto contenha uma variável. Se você determinar a derivada da integral inteira em relação à variável no limite superior, a resposta será a função dentro do

sinal da integral (não integrada), com o limite superior substituído, multiplicado pela sua derivada. Esse teorema parece (e até cheira) complexo, mas não é tão difícil assim. Confie em mim! Você só precisa aprender o padrão:

Exemplo 3: Avalie $\frac{d}{dx}\left(\int_{\text{sen}\,x}^{3} t^2\,dt\right)$.

Solução: Você não precisa usar o atalho da parte dois do teorema, mas ele facilita muito as coisas. Note que as expressões variáveis estão no limite inferior (e não no superior), o que não é permitido pelo teorema. Assim, você deve trocá-los usando uma propriedade das integrais que discutimos antes neste capítulo. Você pode trocar os limites de uma integral, contanto que a multiplique por –1.

$$\frac{d}{dx}\left(-\int_{3}^{\text{sen}\,x} t^2\,dt\right)$$

Como você está calculando a derivada em relação a *x* (e *x* é o limite superior), e o limite inferior é uma constante, o caminho está livre para você aplicar o novo teorema. Você só tem que colocar o limite mais alto (sen *x*) na função t^2 para chegar a $(\text{sen}\,x)^2$ e multiplicar pela derivada do limite superior (que será cos *x*). Não se esqueça do sinal negativo, que fica na frente de tudo:

$$-\text{sen}^2x \cdot \cos x.$$

Ponto Crítico

E se você esquecer esse teorema? Não tem problema! Você pode resolver o Exemplo 3 de outro jeito, trabalhando de dentro para fora (começando com o problema de integração e então encontrando a derivada). Você vai chegar à mesma resposta. Se aplicar a parte um do Teorema Fundamental, terá:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{\text{sen}\,x}^{3}\right) = \frac{d}{dx}\left(9 - \frac{1}{3}\text{sen}^3\,x\right)$$

Encontre a derivada em relação a *x* para obter $-\text{sen}^2x \cdot \cos x$. Não se esqueça de aplicar a regra da cadeia para a derivada de $\left(\frac{1}{3}\text{sen}^3x\right)$ - é daí que vem o cos *x*.

Você não tem que trocar sempre os limites e tornar a integral negativa. Só faça isso se a constante aparecer no limite superior. O que acontece se ambos os limites tiverem variáveis? Se esse for o caso, você não poderá usar o atalho que o teorema oferece e deve recorrer ao caminho mais longo, descrito no *box* anterior.

Você Tem Problemas

Problema 3: Avalie $\frac{d}{dx}\left(\int_{1}^{\tan x} e^t dt\right)$ duas vezes: usando o teorema fundamental do cálculo parte um e parte dois.

Substituição *U*

Neste ponto, você não consegue resolver muitos problemas de integração. Você deve ter decorado várias antiderivadas (como $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ e $\int e^x dx = e^x + C$) e dominado a regra da potência para integração (o que significa, por exemplo, que você sabe que $\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + C$). Mas o que fazer se as duas técnicas falharem? Você olha cheio de esperança para um novo método – a substituição *u*. Você vai usar este método tanto quanto a regra da potência para integração. É um peso pesado do cálculo.

A chave para a substituição *u* é encontrar uma parte da função cuja derivada esteja também na função. A derivada pode aparecer a menos de um coeficiente, mas, do contrário, deve aparecer na própria função.

Estes são os passos que você deve seguir para a substituição *u*:

1. Procure por uma parte da função cuja derivada também apareça na função. Se você não souber bem o que usar, tente o denominador ou algo elevado a uma potência na função.
2. Coloque *u* igual à parte escolhida da função e encontre a derivada em relação a nada.
3. Use as suas expressões *u* e *du* para substituir partes da integral original, e a sua nova integral será bem mais fácil de resolver.

Exemplo 4: Use a substituição *u* para encontrar $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$ (e prove que a integral da tangente é igual a $-\ln|\cos x| + C$).

Ponto Crítico

Encontrar a derivada em relação a nada significa adicionar um "*dx*", "*dt*" ou termo similar à derivada, dependendo da variável da expressão. Por exemplo, a derivada de sen *x* em relação a nada é cos *x dx* (apenas adicione "*dx*"). A derivada de ln *t* em relação a nada é $\frac{1}{t}dt$. Você diferencia do mesmo jeito e adiciona a parte extra ao final.

Solução: Iguale *u* a uma parte da integral cuja derivada também esteja na integral. Como seno e cosseno estão presentes (e a derivada de cada um é basicamente a outra função), você pode escolher qualquer uma delas para ser *u*, mas lembre-se da dica que eu dei: se não tiver certeza quanto à expressão que deve escolher, escolha o denominador ou qualquer termo elevado a uma potência. Então, coloque $u = \cos x$ e encontre a derivada em relação a nada para obter $du = -\operatorname{sen} x\,dx$.

Aí está o sen *x* que você esperava. Assim como o $u = \cos x$, ele aparece na integral. Bem, quase. Na integral original, sen *x* é positivo, então multiplique os dois lados de $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ por –1 para que as funções seno se igualem:

$$-du = \operatorname{sen} x\,dx$$

Agora é hora de escrever a integral original com os *u* em vez de os *x*. Em vez de sen *x*, o novo numerador é $-du$ (já que $-du = \operatorname{sen} x\, dx$). O novo denominador é *u* (já que $u = \cos x$).

$$\int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u}$$

Ponto Crítico

Você deve usar a substituição *u* para integrar uma função contendo algo além de *x*, assim como teve de usar a regra da cadeia para diferenciar tais funções. Por exemplo, na integral $\int \cos(3x)dx$, a função cosseno contém 3*x*, não apenas *x*, então coloque $u = 3x$ e $du = 3dx$. Apenas *dx* está na integral original (não 3*dx*), então encontre *dx* para obter $\frac{du}{3} = dx$. Reescreva a integral usando *u*s em vez de *x*s, e teremos $\int \cos u \cdot \frac{du}{3}$ ou $\frac{1}{3}\int \cos u\, du$, que é igual a $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$.

Lembre-se de que a integral de $\frac{1}{x}$ é $\ln|x|$, então $-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$. O passo final é substituir o *u* usando a equação *u* original ($u = \cos x$) para obter a resposta final $-\ln|\cos x| + C$.

A parte mais traiçoeira da substituição *u* é decidir o que será *u*. Se a sua primeira opção não funcionar, não perca tempo com ela. Tente outra coisa até que funcione para você. Uma hora vai funcionar. A única maneira de ficar muito bom nisso é praticando, praticando e praticando. Mais cedo ou mais tarde, ficará mais fácil escolher o *u* correto.

Você Tem Problemas

Problema 4: Avalie $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan x\, dx$. Dica: se você fizer a substituição *u* com a integral definida, precisa mudar os limites da integração ao substituir *u* e *du*. Para alterar os limites, substitua cada um deles no local de *x* da sua equação *u*.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- A integração, como a diferenciação, tem uma regra de potência própria em que você soma 1 ao expoente e divide pelo novo expoente.
- Funções trigonométricas têm integrais bizarras. É difícil produzir algumas delas sozinho, por isso é melhor memorizar.
- As duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo lhe dizem como avaliar uma integral definida e mostram um atalho para encontrar derivadas específicas de expressões integrais.
- A substituição *u* ajuda você a integrar expressões que contenham funções e suas derivadas.

Capítulo 16

Aplicações do Teorema Fundamental

Neste Capítulo:

- Encontrando áreas ainda mais curvadas
- Teorema do Valor Médio para integrais
- Equações de posição e distância percorrida
- Funções definidas por integrais definidas

Depois que você aprendeu a encontrar a inclinação de uma tangente (uma habilidade aparentemente sem muita importância), provavelmente você achou que as aplicações da derivada nunca fossem acabar. Você estava determinando velocidade e taxas de variação (instantânea e média), calculando taxas de variação relacionadas, otimizando funções, determinando extremos e, claro, trazendo paz e prosperidade ao universo.

Se você acha que é só uma questão de tempo até que chovam aplicações de integrais definidas, você deve ser sensitivo (ou você leu o sumário). Por enquanto, vamos dar uma olhada em alguns dos tópicos sobre integrais definidas mais populares do cálculo. Vamos começar determinando a área delimitada por duas curvas (e não apenas uma curva e o eixo x). Depois, vamos passar rapidamente por alguns tópicos que já discutimos, mas vamos dar uma temperada neles com os nossos conhecimentos sobre integrais. Finalmente, vamos checar funções integrais definidas, também chamadas funções de acumulação.

Calculando a Área entre Duas Curvas

Isso vai fazer você pirar! Na verdade, ao ler isto, a sua sanidade pode ser colocada à prova. Os últimos fios de consciência que te ligam a este mundo mortal podem arrebentar, jogando-o na loucura – ou pelo menos fazendo-o perder o apetite. Talvez você queira se sentar antes de continuar.

Você vinha calculando a área entre curvas *desde sempre sem nem mesmo saber disso*. Pronto, falei. Espero que esteja tudo bem com você.

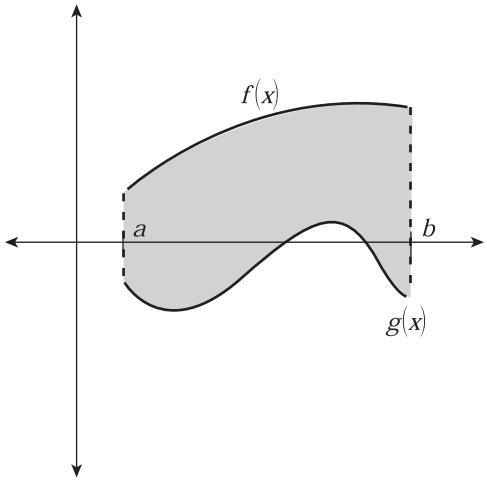
Ponto Crítico

Se você tiver funções contendo y em vez de funções contendo x ($f(y) = y^2$, por exemplo), mesmo assim pode calcular a área entre as funções. No entanto, em vez de subtrair a de cima pela de baixo, você subtrai a da direita pela da esquerda.

Se você quiser calcular a área entre duas curvas contínuas, vamos chamá-las de $f(x)$ e $g(x)$, em um mesmo intervalo $[a,b]$, terá de fazer o seguinte: Determine uma integral definida, como no capítulo anterior, tendo a e b como limites de integração superior e inferior, respectivamente. Você vai colocar $f(x) - g(x)$ ou $g(x) - f(x)$ na integral. Para decidir qual delas usar, você tem de desenhar o gráfico das funções – subtraia o gráfico menor do maior. Por exemplo, na Figura 16.1, $g(x)$ está abaixo de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$.

Figura 16.1

Pelo menos no intervalo $[a,b]$, o gráfico de $f(x)$ é sempre mais alto que o gráfico de $g(x)$.



Cuidado! Se você subtrair as funções na ordem errada, vai chegar a uma resposta negativa, e você não quer uma resposta negativa quando está tentando encontrar a área entre duas curvas, mesmo que alguma porção dessa área esteja abaixo do eixo x.

E se as curvas trocarem de lugar? Por exemplo, observe o gráfico da Figura 16.2. À esquerda de $x = c$, $f(x)$ está acima de $g(x)$, mas quando $x > c$, as funções trocam de lugar e $g(x)$ vai para o topo.

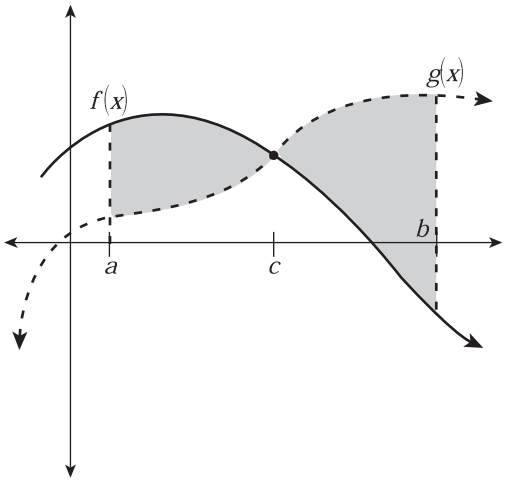


Figura 16.2

Os gráficos se revezam no topo – nenhum deles está acima do outro no intervalo todo.

Para encontrar a área sombreada, você terá de usar duas integrais definidas separadas: uma para o intervalo [*a*,*c*], quando $f(x)$ está no topo, e uma para [*c*,*b*], quando $g(x)$ é:

$$\int_a^c \big(f(x) - g(x)\big)dx + \int_c^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Ponto Crítico

A razão de termos feito isso tecnicamente o tempo todo é que sempre tentamos encontrar a área entre a curva e o eixo de *x*, que tem a equação $g(x) = 0$. Assim, se uma função $f(x)$ está acima do eixo de *x* no intervalo [*a*,*b*], a área entre as duas curvas é $\int_0^3 \big((x^2+1) - 0\big)dx$. A segunda equação com o valor de 0 esteve invisível todo esse tempo.

Exemplo 1: Calcule a área entre as funções $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \cos x$ no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Solução: Esses gráficos ficam pulando um em cima do outro pelo eixo *x*, mas no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $g(x)$ está definitivamente acima de $f(x)$(veja a Figura 16.3).

Assim, a integral terá $g(x) - f(x)$: $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \big(\cos x - \text{sen}2x\big)dx$. Separe isso em integrais: $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \text{sen}2x dx$. A primeira é fácil:

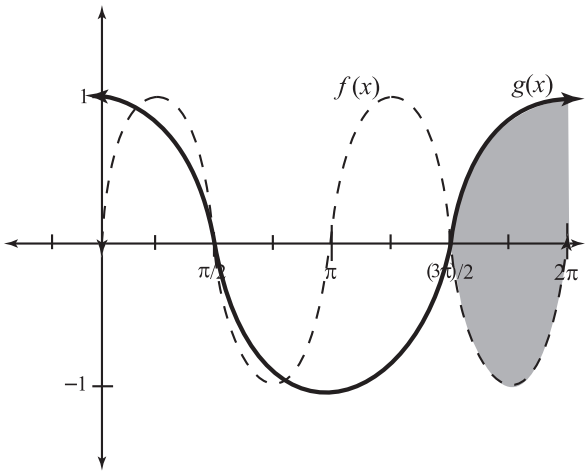
$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\, dx = \big(\text{sen}\, x\big)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = \text{sen}\, 2\pi - \text{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 - \big(-1\big) = 1$$

Você tem que usar a substituição *u* para integrar sen 2*x*, usando $u = 2x$:

$$\frac{1}{2}\int_{3\pi}^{4\pi} \text{sen}\, u\, du = \frac{1}{2}\big(-\cos u\big)\Big|_{3\pi}^{4\pi} = \frac{1}{2}\big(-\cos 4\pi - \big(-\cos 3\pi\big)\big) = \frac{1}{2}\big(-2\big) = -1$$

Figura 16.3

No intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $g(x) = \cos x$ está acima de $f(x) = \text{sen } 2x$.



Não se esqueça de mudar os limites de x para limites de u ao fazer a substituição u. Por exemplo, para obter o novo limite de u 4π, coloque o antigo limite de x de 2π na equação: $u = 2(2\pi) = 4\pi$. A resposta final é a primeira integral menos a segunda:

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} g(x)\,dx - \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\,dx = 1 - (-1) = 2$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Calcule a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x^3$ no primeiro quadrante.

O Teorema do Valor Médio para Integração

Relembre o Teorema do Valor Médio do Capítulo 13. Ele dizia que, em alguma localização em um intervalo, a derivada era igual à taxa média de variação do intervalo todo. Acontece que a integração tem sua própria versão desse teorema, mas como envolve áreas, e não taxas de variação, é um pouco diferente.

Uma Interpretação Geométrica

Basicamente, o Teorema do Valor Médio para Integração diz que, em algum ponto em um intervalo $[a,b]$ existe um certo ponto $(c, f(c))$ entre a e b (veja a Figura 16.4). Se você desenhar um retângulo cuja base é o intervalo $[a,b]$ e cuja altura é $f(c)$, a área será exatamente aquela abaixo da função em $[a,b]$.

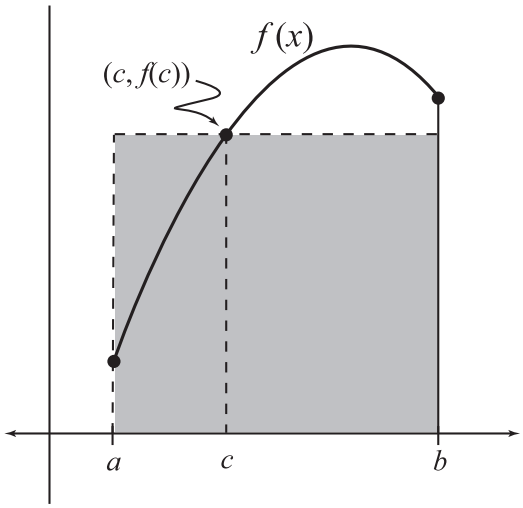


Figura 16.4

Representação visual do Teorema do Valor Médio para Integração. A área do retângulo cuja altura é $f(c)$ é exatamente igual a $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema do Valor Médio para Integração: Se uma função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$, então existe c, $a \le c \le b$, de modo que $(b-a)\cdot f(c) = \int_a^b f(x)dx$.

Esse teorema, como seu predecessor, é apenas um teorema de existência. Ele garante que o valor $x = c$ e a altura correspondente $f(c)$ existam. Talvez você se pergunte por que é tão importante que um gráfico de curvas e um velho retângulo sempre dividam a mesma área. Vamos chegar lá após o próximo exemplo.

Ponto Crítico

No Teorema do Valor Médio para Integração $(b - a)$ representa a largura do retângulo, já que é a extensão do intervalo $[a,b]$. A altura do retângulo é, como já discutimos, $f(c)$. Pode haver mais de um c no intervalo que satisfaça o teorema para integração, mas deve haver pelo menos um.

Exemplo 2: Encontre o valor $f(c)$ garantido pelo Teorema do Valor Médio para Integração na função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 4$ no intervalo $[1,4]$.

Solução: Esse teorema nos diz que há um c entre a e b de modo que $(b-a)\cdot f(c) = \int_a^b f(x)dx$. Você sabe tudo, menos o que é c, mas não se preocupe. Coloque aí tudo o que já sabe:

$$(4-1)\cdot f(c) = \int_1^4 \left(x^3 - 4x^2 + 3x + 4\right)dx$$

Depois do rápido probleminha de subtração à esquerda (e a integral definida ligeiramente mais extensa à direita), você deve obter...

Ponto Crítico

Se o Exemplo 2 tivesse pedido para você encontrar o valor de c e não o valor de *f*(c), você ainda seguiria os mesmos passos. No final, porém, você colocaria o ponto $(c, \frac{19}{4})$ em *f*(x) e determinaria c.

$$3f(c) = \frac{57}{4}$$

$$f(c) = \frac{57}{12} = \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Isso quer dizer que a área abaixo da curva $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 4$ no intervalo [1,4] (que é $\frac{57}{4}$) é igual à área do retângulo cuja largura é de mesmo valor da extensão do intervalo (3) e cuja altura é $\frac{19}{4}$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre o valor de *f*(c) garantido pelo Teorema do Valor Médio para Integração para a função $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ no intervalo [1,100].

Teorema do Valor Médio

O valor $f(c)$ que você encontrou no Exemplo 2 e no Problema 2 tem um nome especial. É chamado de *valor médio* da função. Se você pegar o Teorema do Valor Médio para Integração e dividir os dois lados por $(b - a)$, vai obter a equação de valor médio:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

É apenas uma forma diferente da equação anterior, então não requer muita atenção. Porém, alguns livros pulam o Teorema do Valor Médio para Integração e vão direto para esse, chamado de Teorema do Valor Médio. O Problema 2 ficaria assim: "Encontre o *valor médio* de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ no intervalo [1,100]". E você resolveria o problema do mesmo jeito (veja a Figura 16.5).

definição

O **valor médio** de uma função é o valor *f*(c) garantido pelo Teorema do Valor Médio para Integração (a altura do retângulo de mesma área). O valor médio é obtido pela equação $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. Pense desta forma. A maioria das funções deita e rola em seu domínio. Se você pudesse "elevar o nível" de uma função preenchendo os seus vales e aplainando terrenos até que a função se tornasse uma linha horizontal, a altura dessa linha (seu valor *y*) seria o valor médio dessa função.

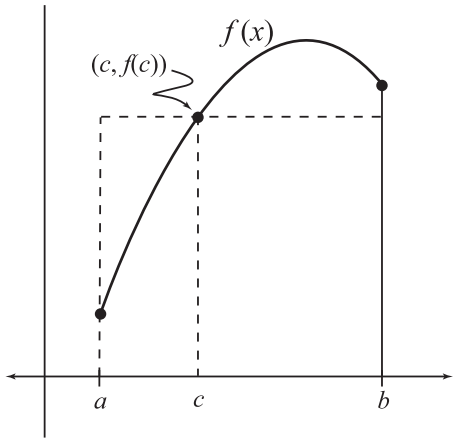


Figura 16.5

Aqui está o diagrama do Teorema do Valor Médio para Integração mais uma vez. A altura da linha pontilhada é o valor médio da função. Embora a função mergulhe para baixo e se jogue para cima de $f(c)$, essa é a altura média de $f(x)$.

Encontrando Distâncias Percorridas

Integrais definidas também brincam com funções de posição e de velocidade. Lembre-se de que as derivadas medem a taxa de variação. Bem, acontece que as integrais definidas de funções de taxas de variação medem a variação acumulada. Por exemplo, se você tem uma função que representa a taxa de venda do novo brinquedo do momento, o bambolê superfantástico, a integral definida lhe dá o número real de bambolês vendidos.

Os professores de matemática, porém, gostam de explorar essa propriedade das integrais aplicada ao movimento. Especificamente, a integral definida da função da velocidade de um objeto mostra o seu deslocamento total. Mas tome cuidado: você vai encontrar muitos problemas que pedem a *distância* total percorrida por um objeto – não o deslocamento total. Para calcular a distância total, você terá de determinar em que ponto o objeto muda de direção (com um gráfico de sinais) e, então, integrar a velocidade separadamente em cada intervalo em que a direção varia.

de•fi•ni•ção

Aqui está a diferença entre distância total percorrida e **deslocamento total**. Digamos que, em qualquer hora t, eu queira saber (em quilômetros) o quão distante estou da minha poltrona preferida (que a minha esposa odeia). Minha posição inicial ($t = 0$ hora) é na poltrona, então $s(0) = 0$. Duas horas depois, eu estou no trabalho, a 100 km de minha poltrona, então $s(2) = 100$ km. Depois de um dia de trabalho, volto para casa e estou em minha poltrona, e $s(12) = 0$. Eu percorri uma distância total de 200 quilômetros, calculando a minha viagem da poltrona para o trabalho e vice-versa. Porém, o meu deslocamento é 0. O deslocamento é a variação total da posição calculando apenas a posição inicial e a final; se o objeto em questão muda de direção a qualquer momento no intervalo de tempo, o deslocamento não reflete corretamente a distância total percorrida.

Exemplo 3: No livro *A Sociedade do Anel* de J.R.R. Tolkien, um jovem *hobbit* chamado Frodo embarca em uma aventura épica, excitante e de pés cabeludos para destruir "O Anel" nas chamas da Montanha da Perdição. Com base em estimativas e no livro *The Journeys of Frodo: An Atlas of J.R.R. Tolkien,* de Barbara Strachey, eu montei uma equação para a jornada de Frodo. Durante os quatro primeiros dias de sua empreitada (do Condado até a casa de Tom Bombadil), sua velocidade (em quilômetros por dia) é dada pela equação:

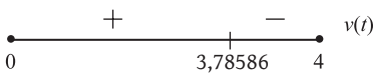
$$v(t) = -15{,}5t^3 + 86{,}25t^2 - 117{,}25t + 48{,}75$$

Por exemplo, $v(2)$ fornece a velocidade aproximada exatamente ao final do segundo dia. Descubra a distância total percorrida por Frodo de $t = 0$ a $t = 4$.

Solução: Como você quer encontrar a distância total percorrida, precisa determinar se Frodo mudou de direção em algum ponto e começou a percorrer o caminho de volta ao Condado. Isso não acontece necessariamente porque o senso de direção dos *hobbits* é ruim, mas por causa de obstáculos, como a floresta dos *ents*, onde eles são pegos por árvores falantes etc. Para checar se a direção dele mudou, monte um gráfico de sinais de velocidade (veja a Figura 16.6).

Figura 16.6

Os *hobbits* têm um bom senso de direção; aliás, eles ficam cada vez mais longe do Condado antes mesmo do final do quarto dia de jornada.



Integre a equação da velocidade separadamente em ambos os intervalos. Como eles estão se movendo ligeiramente para trás (ou seja, ao ponto de partida) no intervalo (3.78586,4), a integral definida será negativa. No entanto, como continua representando a distância que os *hobbits* estão viajando, você não quer subtrair isso da sua resposta, então transforme esse valor no oposto, multiplicando por –1. Seria bom fazer isso em qualquer parte negativa do seu gráfico de sinais nesse tipo de problema. Assim, a distância percorrida será:

$$\int_0^{3,78586}\left(-15{,}5t^3+86{,}25t^2-117{,}25t+48{,}75\right)dx-\int_{3,78586}^{4}\left(-15{,}5t^3+86{,}25t^2-117{,}25t+48{,}75\right)dx$$

Ainda que o número seja horrível, a premissa é muito simples. Vou deixar que você descubra. Você deveria obter 108,298 para o primeiro intervalo (distância percorrida a partir do Condado) e –(–3,298) para o segundo, que é a pequena distância percorrida em direção ao Condado; a soma dá 111,596 quilômetros.

Ponto Crítico

Agora você vê que os números desse problema não são números inteiros fáceis. Eles quase nunca são em exemplos do mundo-real (ou da Terra Média). Como a reforma do cálculo (um novo movimento entre muitos matemáticos para tornar o cálculo mais realista e para compreender a tecnologia do cálculo eletrônico) lida com problemas desse tipo, eu quis mostrar um ou dois problemas que são muito mais simples quando se usa tecnologia. Alguns teriam me queimado vivo na fogueira da "matematinquisição" por sugerir algo assim. Na verdade, uma vez algumas moças da cantina gritaram comigo no colégio onde trabalhei porque sugeri que devíamos usar uma calculadora para checar as respostas quando frações são convertidas para decimais. Nunca recebi tão poucas batatas fritas em meu prato como naquele dia. Como essas moças podem ser amargas...

Você Tem Problemas

Problema 3: Quando satélites circulam perto de um planeta ou da Lua, o campo gravitacional que rodeia o corpo celestial aumenta a velocidade do satélite e muda a sua direção em um movimento orbital chamado "estilingue". (Você deve conhecer o filme *Apolo 13*, no qual Tom Hanks e sua tripulação executaram uma manobra estilingue ao redor da Lua para se arremessarem de volta à Terra). Digamos que uma nave executando essa manobra tenha a equação de posição $s(t) = t^3 - 2t^2 - 4t + 12$, onde t está em horas e $s(t)$ representa milhares de quilômetros de distância da Terra. Qual é a distância total percorrida pela nave nas primeiras cinco horas?

Funções de Acumulação

Antes de encerrarmos o capítulo e fazermos dele uma memória distante, vamos falar de funções de acumulação. Você provavelmente vai deparar com elas por aí, espreitando as aulas de cálculo contemporâneo, já que, desde a reforma do cálculo, elas estão totalmente na moda. Uma *função de acumulação* é uma integral definida com uma expressão variável em um ou mais limites de integração. São chamadas assim porque adquirem seus valores acumulando áreas abaixo de curvas, como todas as integrais definidas.

Em termos práticos, você deve ser capaz de avaliar e diferenciar essas funções, então vamos nessa. Acredite se quiser, mas avaliar funções de acumulação é tão fácil quanto avaliar qualquer outra função – simplesmente substitua o valor de *x* correto. Feito isso, você vai aplicar o Teorema Fundamental à integral definida resultante. Por exemplo, se você tem a

de•fi•ni•ção

Uma **função de acumulação** é definida por uma integral definida; a função terá uma variável em um ou dois de seus limites de integração.

Ponto Crítico

A função de acumulação mais famosa é $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$. A função logarítmica natural obtém seu valor acumulando a área abaixo da curva simples $y = \frac{1}{t}$! Por exemplo, o valor ln(5), que sempre pareceu meio alienígena para mim (onde é que se arranja um valor como 1,60944?), é igual à área abaixo de $y = \frac{1}{t}$ no intervalo [1,5].

função $f(x) = \int_2^x (t-4)dt$ e precisa encontrar $f(4)$, coloque 4 em x – e não em t, já que essa é uma função de x, como em $f(x)$ – encontrando, assim, o limite superior da integração 4; então, integre normalmente:

$$\begin{aligned} f(4) &= \int_2^4 (t-4)dx \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - 4t\right)\Big|_2^4 \\ &= (8-16) - (2-8) = -2 \end{aligned}$$

Para encontrar a derivada de uma função de acumulação, apenas use a parte dois do Teorema Fundamental.

Por exemplo, se $f(x) = \int_2^x (t-4)dt$, então $f'(x) = x - 4$; coloque o limite mais alto em t e multiplique por sua derivada (nesse caso, 1). Fácil, não é mesmo? Você já sabia como lidar com esse problema antes mesmo de ele aparecer. É isso aí!

Você Tem Problemas

Problema 4: Se $g(x) = \int_{-\pi}^{x/2} \cos 2t dt$, avalie:

(a) $g(4\pi)$

(b) $g'(4\pi)$

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Para encontrar a área delimitada por duas curvas, integre a curva de cima e subtraia pela curva de baixo no intervalo apropriado.
- O valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a,b]$ é obtido dividindo-se a integral definida dessa função, $\int_a^b f(x)dx$, pela extensão do próprio intervalo, $b - a$.
- Para calcular a distância percorrida por um objeto, calcule a integral definida da função de velocidade separadamente para cada período de tempo em que há mudança de direção.
- Funções de acumulação obtêm seus valores agregando área abaixo de uma curva; são definidas por integrais definidas com variáveis em um ou mais de seus limites de integração.

Capítulo 17

Dicas de Integração para Frações

Neste Capítulo

- Reescrevendo frações para integrar
- Substituição *u* atualizada
- Funções trigonométricas inversas como antiderivadas
- Completar quadrados para integrar

Vamos ser honestos agora. Integração é um saco. Na verdade, é muito pé no saco. É mais difícil do que determinar derivadas (não é imaginação sua), porque é raro haver um caminho mais curto para integrar uma expressão se você não puder usar a regra da potência. No caso das derivadas, se você tem uma fração, aplica a regra do quociente – e ponto final. Ninguém fica confuso, todos ficam felizes. Mas não é a mesma coisa com as integrais.

Se você tem uma expressão que não pode ser integrada por meio da regra da potência ou substituição *u* básica, é preciso fazer uma escolha. E a escolha é: o que a gente tenta fazer depois dessas opções? Embora a grande maioria dos problemas de cálculo que você vai encontrar possa ser integrada por meio de um desses dois métodos, há um *self-service* de técnicas alternativas para encontrar integrais. Embora nenhuma seja realmente difícil, nenhuma é um atalho como a diferenciação.

Para integrar uma fração, não existe uma regra "difícil-mas-rápida" que possa ser aplicada sempre. Na verdade, os métodos disponíveis para integrar frações

são quase infinitos. Porém, este capítulo vai adicionar três das ferramentas mais populares à sua maleta de ferramentas para integração. Se você estivesse tentando martelar um prego, não usaria uma chave de fenda, usaria? Bem, se a substituição *u* equivale metaforicamente a uma chave de fenda da integração, aí vêm a talhadeira, a chave de soquete e os alicates da integração.

Separação

Separar é difícil, mas em certas circunstâncias a separação é muito vantajosa. Às vezes, as coisas simplesmente não dão certo, e as frações precisam seguir caminhos distintos. Depois de um longo e agradável tempo juntos no numerador, os termos precisam de um pouco mais de tempo para eles e de algum espaço individual. Porém, depois de todo o tempo em que estiveram juntos, eles guardaram algumas coisas no denominador que ambos querem levar. A boa notícia é que, no mundo da matemática, ambas as partes do numerador levam uma porção do denominador – sem advogados, sem inventários. Ambos os termos do numerador vão embora com um denominador inteiro, e um pouco mais sábios por terem se envolvido nisso, é claro.

Ponto Crítico

Na escola, você aprendeu que duas frações não podiam ser somadas a menos que tivessem o mesmo denominador. Com esse conhecimento, você calculava, todo orgulhoso, coisas do tipo $\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7+1}{3}=\frac{8}{3}$, e nunca mais olhava para trás. Bem, dê uma olhadinha por um momento. Se você tiver a fração $\frac{a+b}{c}$, pode reescrevê-la como $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, assim como você sabe que $\frac{7+1}{3}=\frac{7}{3}+\frac{1}{3}$.

Integrais peso-pesadas (com muitos numeradores e apenas um denominador) e outras integrais fracionárias são ocasionalmente mais fáceis de resolver se você dividir a fração maior em outras menores e mais facilmente manejáveis. Embora o problema original não possa ser resolvido via substituição *u* ou regra da potência, as integrais menores geralmente podem.

Alerta do Kelley

Nunca separe o denominador de uma fração – apenas o numerador. Ainda que $\frac{1+3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ (ambos os lados da equação são iguais a 2), observe o que acontece quando a fração é invertida: $\frac{2}{1+3}=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}$.

Exemplo 1: Encontre $\int\frac{x^4-2x^3+5x^2-3x+1}{x^2}\,dx$ usando a técnica da separação.

Solução: Trata-se de uma fração, portanto, a regra da potência não se aplica, assim como usar *u* para o numerador ou denominador não vai fazer muito por você – então a substituição *u* também está fora. No entanto, veja o que acontece se você separar os cinco termos do numerador maior em cinco frações:

$$\int \frac{x^4}{x^2}\,dx - 2\int \frac{x^3}{x^2}\,dx + 5\int \frac{x^2}{x^2}\,dx - 3\int \frac{x}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

Quando você simplifica cada uma dessas frações, você obtém integrais simples, sendo que cada uma pode ser integrada pela regra da potência para integração:

$$\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int dx - 3\int x^{-1}\,dx + \int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5\cdot\frac{x^1}{1} - 3\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 3\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

Ponto Crítico

No Exemplo 1, note que $\int dx = x$. Isso porque $\int dx$ é a mesma coisa que $\int 1\,dx$, e a integral de 1 é x.

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}\,dx$ usando a técnica da separação.

Mágica da Substituição *U* e Divisão Longa

Quando discutimos a substituição u pela primeira vez, eu mencionei que a derivada de u deve aparecer no problema. Isso é geralmente verdadeiro, então, tecnicamente, eu não estava mentindo. Porém, há uma maneira de usar a substituição u, mesmo que essa não seja a escolha mais óbvia.

Exemplo 2: Encontre $\int \frac{2x-1}{x-2}dx$.

Solução: Apenas para se divertir, vá em frente e tente encontrar a antiderivada usando a substituição u. Lembre-se da dica: se você não tem certeza quanto a que termo vai igualar a u, tente o denominador. Assim, $u = x - 2$ e $du = dx$. Se você fizer as substituições apropriadas depois:

$$\int \frac{2x-1}{u}\,du.$$

Para ser honesto, não parece melhor que a original, parece? Mas não desista; suas opções ainda não acabaram. Volte para a sua equação u e resolva x para obter:

$$u = x - 2$$
$$x = u + 2$$

Agora, substitua esse valor de *x* no numerador da integral e, de repente, tudo vai ficar mais alegre:

$$\int \frac{2(u+2)-1}{u}\,du$$
$$= \int \frac{2u+3}{u}\,du$$

Pelo menos, todas as variáveis são iguais agora. É um alívio! Você consegue ver para onde vai a partir daqui? Essa fração é peso-pesada, cheia de termos no numerador, mas apenas um no denominador, então dá para usar o método da separação, que vimos na última seção, para finalizar. Veja que feliz coincidência você ter acabado de aprender isso!

$$\int \frac{2u}{u}\,du + \int \frac{3}{u}\,du$$
$$= 2\int du + 3\int \frac{1}{u}\,du$$
$$= 2u + 3\ln|u| + C$$
$$= 2(x-2) + 3\ln|x-2| + C$$
$$= 2x + 3\ln|x-2| + C$$

Ponto Crítico

Infelizmente, o espaço não permite uma revisão de divisão longa de polinômios. Se você não se lembra como se faz isso, acesse obaricentrodamente.blogspot.com.br ou fatosmatematicos.blogspot.com.br e faça uma busca por "divisão polinomial".

Você pode estar se perguntando por que o –4 desapareceu na segunda etapa do Exemplo 2. Lembre-se que *C* é uma constante que você não conhece. Se você subtrair 4, vai obter um outro número (que é o valor misterioso menos 4). Como eu *ainda* não sei o valor de *C*, escrevo novamente *C* e não *C* – 4.

Há alternativas para integrar frações como essas. Na verdade, você pode começar uma integral racional aplicando a divisão longa; isso ajuda a simplificar o problema *se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador*. Funciona como um feitiço se o denominador não for um único termo, como no caso do Exemplo 2.

Como o grau do numerador (1) é maior ou igual ao grau do denominador (1), comece dividindo 2*x* – 1 por *x* – 2:

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & x-2 \\ \hline -2x+4 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \Rightarrow \frac{2x-1}{x-2} = 2 + \frac{3}{x-2}$$

Assim, você pode reescrever $\int \frac{2x-1}{x-2}\,dx$ como $\int\left(2+\frac{3}{x-2}\right)dx$, e a mágica da substituição *u* não é mais necessária. A solução, novamente, será $2x + 3\ln|x-2| + C$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre $\int \frac{2x+1}{2x-3}\,dx$ usando a mágica da substituição *u* ou a divisão longa.

Integrando com Funções Trigonométricas Inversas

Deixe-me prefaciar esta seção com um pouco de perspectiva. Você não vai ter de integrar usando funções trigonométricas inversas com muita frequência. Na verdade, você provavelmente vai usar as fórmulas que está prestes a aprender com menos frequência do que universitários lavam roupa em um semestre, e, devo dizer, não é um número grande. Porém, uma vez ou outra você verá um sinal revelador em um problema com integrais – uma marca especial revelando que as funções trigonométricas inversas serão parte da sua solução.

Quando você estava memorizando derivadas trigonométricas no Capítulo 9, eu joguei as funções derivadas inversas para o final da lista. Espero que você tenha mesmo memorizado – ou que pelo menos possa reconhecê-las entre vários suspeitos. Como fizemos em seções anteriores, vamos agora fazer o caminho inverso: da derivada para a função trigonométrica inversa. Por exemplo, como $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$, automaticamente sabemos que $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$. Não pense, no entanto, que estamos limitados a essa fórmula. O denominador não precisa ser $1 + x^2$ para usarmos a fórmula arco-tangente. Qualquer constante pode ficar no lugar de 1, e qualquer função pode substituir x^2. Pode parecer um pouco confuso, mas eu preciso mostrar as fórmulas que vamos usar antes de entrarmos nos exemplos – e eles vão deixar tudo bem mais claro, confie em mim.

Em cada uma dessas fórmulas, *a* representa uma constante e *u* representa uma função (eu uso *u* para representar a função e lembrá-lo que terá de usar a substituição *u* pra todos esses problemas de integrais trigonométricas inversas):

- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C$

Essas fórmulas representam padrões de identificação. Se você vê uma integral com uma raiz quadrada no denominador, e dentro dessa raiz quadrada, está um número menos a função quadrática, um alarme deveria disparar dentro da sua cabeça. Esse padrão bate com a primeira fórmula e pode ser integrado usando a fórmula do arco-seno. Se você tiver um denominador com um número mais uma função quadrática, mas nenhuma raiz quadrada, a fórmula arco-tangente pode ser a solução. Lembre-se, não há um jeito mais fácil para saber qual método deve ser usado em cada caso, então não se sinta desencorajado se a sua primeira tentativa falhar – tente outra técnica que você aprendeu até que algo se aplique.

Alerta do Kelley

Preste atenção na ordem da subtração se aparecer um radical no denominador. Em arco-seno, você terá uma constante menos a função, enquanto a ordem é reversa na arco-secante.

Exemplo 3: Avalie $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{4 - \cos^2 x}}\, dx$.

Solução: Você deve objetivar uma integral arco-seno por duas razões: (1) uma raiz quadrada contendo subtração no denominador e (2) a subtração seguindo a ordem "constante menos função quadrática", o que sugere a função arco-seno e não arco-secante, cuja ordem de subtração é reversa. Resolva esse problema com a sua nova fórmula arco-seno, ignorando o numerador por enquanto. Como 4 deve ser o termo a^2, $a = 2$; similarmente, $u = \cos x$.

Como mencionei antes, a presença da função u faz você se lembrar da substituição u, então $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ e $-du = \operatorname{sen} x\, dx$. Usando essas três afirmações, você pode reescrever a integral:

$$-\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Agora, dá certo com a fórmula arco-seno (o coeficiente de –1 não afeta os termos da integral, uma combinação perfeita), então você sabe:

$$-\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$= -\operatorname{arcsen}\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Encontre $\int \frac{3x}{7 + x^4}\, dx$ por meio da integração para obter uma função trigonométrica inversa.

Completando o Quadrado

A maioria das pessoas odeia frações, mesmo que nem se lembre por quê. Eu odeio apenas frações de frações. Você já notou alguma vez que o preço da gasolina, por exemplo, é expresso como frações de frações? O letreiro pode dizer "R$ 1,25", mas se você olhar de perto, verá que se lê R$ 1,25 e $\frac{9}{10}$ de um centavo. Mas não é nem uma coisa nem outra.

A integração pode estar te dando nos nervos quase tanto quanto as frações. A combinação fabulosa da integração de frações é estressante o bastante para fazer seus olhos saltarem e aquela voz em sua mente mudar de tom. Se a sua paciência com integração começou mesmo a te deixar nervoso quando você leu sobre as funções trigonométricas inversas, completar o quadrado ao mesmo tempo que você integra pode te deixar maluco!

Tenho boas notícias. Os métodos de integração que vamos aprender no próximo capítulo são completamente novos e, na verdade, até divertidos. Para ser honesto, acho que os métodos que aprendemos para integrar frações neste capítulo são empecilhos. Mas é como dizem; não se trata de uma competição de personalidade, então temos que levar mais um tópico na boa. Antes de continuar lendo, revise a seção sobre completar o quadrado no Capítulo 2 e releia aquelas fórmulas da última seção de integração trigonométrica inversa.

Integrar completando o quadrado é uma técnica útil em uma circunstância específica: se você tem um polinômio quadrático no denominador e nenhuma variável no numerador. O processo em si não é nada além de uma combinação de coisas que já foram feitas, mas o processo não é óbvio para a maioria das pessoas (incluindo eu!), então vale a pena darmos uma olhada em um exemplo.

Exemplo 4: Encontre $\int \frac{4dx}{3x^2-6x+30}$ completando o quadrado.

Solução: Para completar o quadrado no denominador, o coeficiente de x^2 deve ser 1, então fatore 3 da função quadrática inteira. Enquanto você faz isso, tire aquele 4 do topo:

$$\frac{4}{3}\cdot\int\frac{dx}{x^2-2x+10}$$

Ponto Crítico

Os problemas de integração $\int \frac{1}{f(x)}dx$ e $\int \frac{dx}{f(x)}$ realmente significam a mesma coisa. A segunda versão é o resultado da multiplicação da fração pelo termo *dx*.

Agora, coloque o seu foco no denominador. De acordo com o procedimento de completar o quadrado – apresentado no Capítulo 2 – você deve pegar metade de –2 e elevar ao quadrado para chegar a 1. Para evitar ter de mudar o valor da fração, você deve somar e subtrair 1 no denominador:

$$\frac{4}{3}\cdot\int\frac{dx}{x^2-2x+1-1+10}$$

Agora, fatore $x^2 - 2x + 1$ e combine $-1 + 10$ para obter:

$$\frac{4}{3}\cdot\int\frac{dx}{(x-1)^2+9}$$

Note que essa é uma fração com uma função quadrática somada à constante em seu denominador. Soa familiar? Você pode aplicar a fórmula da integral arco-tangente da última seção, com $u = x - 1$ e $a = 3$. Lembre-se de fazer a substituição u; nesse caso, $du = dx$, então não precisamos ajustar du:

$$\frac{4}{3}\cdot\int\frac{du}{u^2+a^2}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$$
$$=\frac{4}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Encontre $\int\frac{2}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+5}}dx$ completando o quadrado.

Selecionando o Método Correto

Escolher que técnica usar para integrar frações é como tentar construir um barco depois que a enchente já começou. Quanto mais tempo leva, menos motivado você fica para ir até o final. Apenas lembre-se que isso leva tempo e requer prática. A menor diferença entre integrais muda completamente a forma como você resolve o problema.

Por exemplo, considere a integral $\int\frac{dx}{x^2+16}$. A melhor maneira de resolvê-la é com a fórmula arco-tangente com $u = x$ e $a = 4$. Agora, considere a integral $\int\frac{x}{x^2+16}dx$. Nesse caso, completar o quadrado não vai funcionar! Na verdade, a substituição u é a melhor solução. É difícil acreditar que apenas adicionar um simples x ao numerador muda completamente a abordagem. Que tal $\int\frac{x^2}{x^2+16}dx$? Agora apenas uma divisão longa vai te dar a resposta correta, pois o grau do numerador é maior ou igual ao do denominador. Quando a coisa ficar preta com integração de fração, não entre em pânico. Tenha em mente que pode ter que integrar várias vezes, usando vários métodos diferentes, antes que realmente dê certo. Porém, você já deve saber lidar com a maioria deles agora, contanto que seja paciente.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Você pode quebrar frações contidas nas integrais em frações separadas para criar problemas de integrais menores e mais simples.
- Às vezes, a substituição *u* é útil para integrar funções racionais, ainda mais se tanto o numerador quanto o denominador forem lineares (primeiro grau).
- Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, você pode simplificar a integral aplicando divisão de polinômios antes de integrar.
- Se o denominador da integral for uma função quadrática e o numerador não contiver uma variável, você pode completar o quadrado no denominador e pode integrar o resultado por meio de uma função trigonométrica inversa.

Capítulo 18

Métodos Avançados de Integração

Neste Capítulo

- Integração por partes
- Aplicando o método tabular
- Outra maneira de integrar frações
- Ensinando bons modos às integrais impróprias

Sem dúvida, meus alunos sempre odiaram os métodos de integração do Capítulo 17. Provavelmente, seria a última seção que eles chamariam de favorita, ainda que admitam que não seja a mais difícil. A reclamação mais mencionada foi a similaridade dos problemas em detrimento dos processos diferenciados usados para resolvê-los. O fato de tais métodos não serem usados com muita frequência também não ajudou, já que quase não há oportunidades de praticá-los mais adiante no curso.

Na verdade, toda essa aversão a esses tópicos os ajudou a entender melhor as coisas que vamos ver neste capítulo. Integração por partes e por frações parciais são duas das coisas mais interessantes em cálculo. Por um motivo que não sei explicar, o que você vai aprender sobre integração agora torna as outras coisas enfadonhas. Entre as coisas que você vai estudar, está um dos maiores (e mais secretos) truques de cálculo de todos os tempos. Enquanto alguns instrutores de matemática falam rapidamente sobre o assunto, outros quase nem o explicam em sala de aula.

Alguma coisa vive obrigando os professores de matemática a resolver as coisas da forma mais longa e difícil possível. Na verdade, eu nunca me decidi se acho isso bom ou ruim. Nas palavras de outro professor universitário que tive: "Claro, matemática é difícil, mas por que é tão difícil assim?" (Aliás, ele era austríaco, então qualquer coisa que ele dissesse soava como uma ameaça de um supervilão! "Poxa, Michael, parece que você esqueceu a sua constante de integração; serei obrigado a arrancar seus olhos e comê-los por isso..."). Bem, o fato é que matemática não tem que ser assim tão difícil. Não quando você conhece alguns truques.

Integração por Partes

Mesmo depois de ter aprendido todos esses métodos de integração até agora, você ainda vai encontrar integrais que não conseguirá resolver. É tão frustrante como tentar nadar na areia movediça. Quanto mais você se esforça, mais percebe que, desse jeito, não vai chegar a lugar algum. A melhor maneira de se proteger da areia movediça (de acordo com o *Guia de Sobrevivência em Situações Críticas*) é uma vara bem firme, que você pode fincar na areia e usar como alavanca. A integração por partes é a sua vara fincada na cara daqueles problemas nojentos sobre integrais; você provavelmente vai usá-la com alguma frequência, e talvez passe a depender dela. Na verdade, ela será tão útil que você vai acabar usando-a para integrar coisas que poderiam ser feitas de formas bem mais simples. Porém, com a vara em mãos você não vai se importar com nada enquanto marchar em direção ao sol. (*Então, a cortina se fecha. A orquestra toca as trombetas. As luzes se acendem ao som de aplausos fervorosos*).

de•fi•ni•ção

A **integração por partes** permite que você reescreva a integral $\int u\,dv$ (onde u é facilmente diferenciável e dv é facilmente integrada) como $uv - \int v\,du$. Eu chamo essa fórmula de método da "força bruta" porque o método tabular que você vai aprender daqui a pouco, em comparação, é bem mais agradável.

O Método da Força Bruta

O seu objetivo com a *integração por partes* é separar a integral em duas partes (inclusive dx, mas não o sinal da integral em si). Uma das partes (que chamaremos de u) deve ser fácil de diferenciar. A outra parte (que vamos chamar de dv) deve ser fácil de integrar. Às vezes, esse processo requer experimentações. Em seguida, você vai diferenciar u para obter du (como na substituição u), e integrar dv para obter v. Finalmente, coloque todas essas coisas na fórmula da integração por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

À esquerda, estará a integral original, então o lado direito representa uma forma diferente – porém equivalente – de reescrevê-la. É mais ou menos como o método da divisão longa que você aprendeu – essa etapa permite que você escreva a integral de um jeito bem mais manuseável (e ligeiramente maior).

Ponto Crítico

Na verdade, a integração por partes é fruto da regra do produto. Digamos que você tenha duas funções, chamadas $u(x)$ e $v(x)$. De acordo com a regra do produto, $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$. Se você integrar ambos os lados da equação, vai obter $uv = \int u\,dv + \int v\,du$, e resolver $\int u\,dv$ na equação te dá a fórmula por partes. É claro que todos os termos "$+ C$" são deixados de fora – mas você terá de criar um no final se estiver lidando com uma integral indefinida.

Exemplo 1: Encontre a solução de $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ usando a integração por partes.

Solução: Qualquer uma dessas duas partes pode ser facilmente integrada sozinha, mas juntas elas são problemáticas. Não dá para reescrever a integral $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ como $\int x\,dx \cdot \int \operatorname{sen} x\,dx$ - apenas a adição e a subtração em uma integral podem ser separadas em integrais independentes.

Até a substituição u será um duro golpe. E, claro, nenhum dos seus métodos para frações vai funcionar.

Hora de separar: Coloque $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Ainda que você possa integrar x e diferenciar seno, em geral é melhor escolher um "u" que complique menos as coisas quando você chegar à derivada. Assim, diferencie u para obter $du = dx$ e integre a equação dv para obter $v = -\cos x$. (Por enquanto, não se preocupe com o lance do "$+ C$" – vamos colocar isso no final.) Substitua nas partes da fórmula e resolva a integral simples que resulta em:

$$\begin{aligned} \int u\,dv &= uv - \int v\,du \\ \int x \operatorname{sen} x\,dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre a solução de $\int x^2 e^x\,dx$; você terá de usar a integração por partes duas vezes porque a integral resultante do método por partes só pode ser integrada, novamente, por partes!

Eu prometi antes que diria como integrar uma função logarítmica natural por partes. Coloque $u = \ln x$ e $dv = dx$. (O seu termo dv deve sempre incluir dx, mesmo que isso seja tudo o que ele inclui). Assim, $du = \frac{1}{x}\,dx$ e $v = x$. De acordo com a fórmula das partes, $\int \ln x\,dx$ pode ser reescrita como $x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$, então integre:

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C \end{aligned}$$

O Método Tabular

Há uma maneira bem mais fácil de fazer integração por partes, mas um sinal de alerta deve precedê-la. Esse método não funciona para todos os problemas que requerem integração por partes. Se o termo que você escolher para u não se igualar a 0 quando você obtiver múltiplas derivadas, não vai funcionar. Nesse procedimento, você ainda pode começar decidindo qual será o u e o dv. Depois, você desenha uma tabela com três colunas intituladas "u", "dv" e "±1".

Alerta do Kelley

Não se esqueça de se valer do "+ C" na integração por partes quando se tratar originalmente de uma integral indefinida.

Na primeira linha da tabela, coloque o termo u na primeira coluna, dv na segunda e a + 1 na terceira. Na segunda linha, escreva a derivada do termo u, a integral de dv e −1 na coluna ±1. Na terceira linha, obtenha outra derivada, outra integral e volte a +1.

Então, a coluna do u contém u e suas derivadas sucessivas: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc. A coluna dv contém suas integrais sucessivas $g(x)$, $\int g(x)\,dx$, $\int\left(\int g(x)\,dx\right)dx$), e a coluna final começa com +1 e vai alternando entre −1 e +1 depois disso. No final, a sua coluna u vai virar 0. A primeira linha que contiver um 0 para u será a última linha da sua tabela, a não ser por um +1 ou −1 adicional em sua própria linha. A Figura 18.1 é a tabela gerada a partir do exemplo 1 ($\int x\,\text{sen}x\,dx$).

Figura 18.1

A primeira linha contém o u e o dv originais, sendo que as seguintes contêm as derivadas e integrais, respectivamente. Note o termo negativo sozinho na última linha. Siga as setas até a resposta.

u	dv	±1
x	sen x	+1
1	−cos x	−1
0	−sen x	+1
		−1

Agora, desenhe uma série de setas começando no termo u e vá para baixo, chegando à coluna do meio da segunda linha e à terceira coluna da terceira linha. Multiplique esses fatores para obter um termo da sua resposta, $x(-\cos x)(+1) = -x\cos x$. Para obter o segundo termo, desenhe uma seta parecida começando da segunda linha: $1(-\text{sen}\,x)(-1) = \text{sen}\,x$. Não há terceiro termo porque um 0 está nessa posição, então a resposta final é $-x\cos x + \text{sen}\,x + C$. Note que é a mesma resposta à qual chegamos por meio do método mais longo no Exemplo 1.

Você Tem Problemas

Problema 2: Refaça a integral do problema 1 ($\int x^2 e^x\,dx$) usando o método tabular. Mostre que você chega à mesma resposta.

Integração por Frações Parciais

Espero que ainda tenha espaço no seu cérebro para mais um tópico sobre integração de fração. Mas, vamos ser honestos, na verdade está até claro (da mesma maneira que ler o livro *O Senhor das Moscas* seria claro como água se a sua nota de literatura não dependesse do seu entendimento do simbolismo do texto). Em álgebra, você aprendeu a somar expressões racionais. Por exemplo, para somar $\frac{5}{x+1}$ a $\frac{3}{x-5}$, você teria que achar um denominador comum de $(x + 1)(x - 5)$ e simplificar assim:

$$\frac{5}{x+1}\cdot\frac{x-5}{x-5}+\frac{3}{x-5}\cdot\frac{x+1}{x+1}$$
$$=\frac{5(x-5)+3(x+1)}{(x+1)(x-5)}$$
$$=\frac{8x-22}{(x+1)(x-5)}$$

Ponto Crítico

Dá para ver quanto tempo o método tabular economiza em comparação ao método da força bruta. Se a sua tabela tiver mais de três linhas, cada linha extra representa o tempo que você levaria para reaplicar a integração por partes no mesmo problema.

Agora, vamos aprender como ir de $\frac{8x-22}{(x+1)(x-5)}$ para $\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-5}$. O processo é chamado de *decomposição parcial de fração*, e é uma maneira muito legal de integrar uma fração cujo denominador é fatorável.

Exemplo 2: Use a decomposição parcial de fração para encontrar $\int\frac{x+2}{x^2(x-1)}dx$.

Solução: O denominador nem sempre será fatorado por você, mas nesse caso é. Ele é composto por dois fatores lineares (x e $x - 1$), sendo que um deles é elevado ao quadrado. No processo de frações parciais, isso é chamado de *fator de repetição*. Você pode reescrever $\frac{x+2}{x^2(x-1)}$ como a soma de três frações cujos denominadores são fatores individuais do denominador original:

$$\frac{x+2}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

As constantes A, B e C são desconhecidas. O seu objetivo é encontrá-las resolvendo a equação. Para facilitar as coisas, multiplique os dois lados da equação por $x^2(x - 1)$:

$$x + 2 = Ax(x - 1) + B(x - 1) + Cx^2$$
$$x + 2 = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2$$
$$x + 2 = x^2(A + C) + x(B - A) - B$$

Note que você deve agrupar os termos fatorando as variáveis comuns. Isso torna tudo mais fácil. Lembre-se de que os dois lados da equação devem ser iguais e, como não há termo x^2 à esquerda, também não pode ter um à direita, o que significa que

$A + C = 0$. O termo x à esquerda tem coeficiente 1, então o mesmo deve ser verdadeiro à direita: $B - A = 1$. Da mesma forma, $2 = -B$, então $B = -2$ (pois as constantes devem ser iguais dos dois lados). Como você já tem B, pode encontrar A:

$$\begin{aligned} B - A &= 1 \\ (-2) - A &= 1 \\ -A &= 3 \\ A &= -3 \end{aligned}$$

definição

A **decomposição parcial de fração** é um método para reescrever uma fração como a soma e diferença de frações menores cujos denominadores são fatores do denominador maior original. Se um fator no denominador for elevado a uma potência, é chamado de **fator de repetição**. O fator $(x + a)^n$ vai aparecer n vezes na decomposição parcial de fração com potências ascendentes, começando por 1. Em outras palavras, se o denominador contiver o fator de repetição $(x - 3)^5$, sua decomposição terá $\frac{A}{x-3}, \frac{B}{(x-3)^2}, \frac{C}{(x-3)^3}, \frac{D}{(x-3)^4}$, e $\frac{E}{(x-3)^5}$. Mesmo que essas potências aumentem, você vai considerar os fatores lineares, pois ainda há um grau de 1 dentro dos parênteses. No Exemplo 2, o fator de repetição é x, e por isso x e x^2 aparecem em frações separadas.

Finalmente, como $A + C = 0$, $C = 3$. Agora, coloque esses valores na fórmula da fração parcial:

$$\frac{x+2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{-3}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{3}{x-1}$$

A fração original pode ser reescrita em três frações menores, sendo que cada uma pode ser integrada usando a fórmula logarítmica natural ou a regra da potência para integração:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2(x-1)}dx &= \int \frac{-3}{x}dx + \int \frac{-2}{x^2}dx + \int \frac{3}{x-1}dx \\ &= -3\int \frac{1}{x}dx - 2\int x^{-2}\,dx + 3\int \frac{1}{x-1}dx \\ &= -3\ln|x| + \frac{2}{x} + 3\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Como você pode ver, o objetivo da decomposição é "quebrar" o problema em frações manuseáveis. Um conselho: use apenas numeradores de A, B e C quando

os denominadores forem fatores lineares (de repetição ou não). O numerador de uma fração parcial é sempre um grau a menos do que o denominador, e um numerador constante (grau 0) com um denominador linear (grau 1) se encaixa nessa descrição. Se um dos fatores no denominador for quadrático, você vai usar um numerador linear (como $Ax + B$) para essa fração parcial. Por exemplo, veja a decomposição de uma fração com um fator quadrático de repetição:

$$\frac{3x-5}{(x-4)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Integre $\int \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx$ usando a decomposição parcial de fração.

Integrais Impróprias

Há muitas razões para chamarmos uma integral de *imprópria*. Por exemplo, integrais que arrotam à mesa do jantar enquanto discutem os eventos atuais são certamente impróprias. Isso sem mencionar as integrais que dirigem tão coladas em você na estrada que dá para ver o limite superior de integração pelo seu retrovisor. Mas em geral, nós não observamos esse tipo de comportamento rude em nossos símbolos matemáticos, então devemos nos contentar em observar os indicadores matemáticos de integrais impróprias. Os dois mais comuns são descontinuidades infinitas e limites de integração infinitos.

Basicamente, nem os limites da integração no problema nem os números entre eles causam problemas. No problema integral $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$, o problema é óbvio. É claro que você pode integrar a fração para chegar a $\ln|x|$, mas como você coloca ∞ nisso? O infinito não é um número!

Consegue identificar o problema na integral $\int_{-4}^{0} \frac{5}{x+4}dx$? Novamente, a integração não é sofrida (a substituição u e a função logarítmica natural funcionam), mas não faz sentido que -4 seja um limite de integração. A função $\frac{5}{x+4}$ nem mesmo existe em -4, então como pode existir uma área ali embaixo?

Acredite ou não, mas integrais parecidas com $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ e $\int_{-4}^{0} \frac{5}{x+4}dx$ às vezes representam uma área finita (embora nenhuma dessas duas faça isso). Para resolvê-las, teremos de revisitar um velho amigo. Depois de tanto tempo, os limites voltaram para assombrá-lo, como o *burrito* que você comeu ontem no café da manhã.

Exemplo 3: Avalie $\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{x-4}}$, mesmo sendo uma integral imprópria.

Solução: Essa integral é imprópria porque seu limite inferior (4) é um ponto de descontinuidade infinita na função que está sendo integrada. Para remediar essa situação, substitua o limite problemático pela constante genérica a, e deixe que a se aproxime de 4 usando um limite: $\lim_{a\to 4^+}\int_a^7 \frac{dx}{\sqrt{x-4}}$. (Tecnicamente, você tem que aproximar 4 a partir da direita, pois nem há gráfico à esquerda de 4).

Ponto Crítico

No Exemplo 3, a integral é imprópria por causa de um dos seus limites. Talvez você também encontre problemas com os valores entre os limites de uma integral. Por exemplo, $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$ não é imprópria por causa dos limites –2 ou 1, mas sim porque a função $\frac{1}{x^2}$ tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$ que cai entre os limites. Para resolver um problema desses, você teria de quebrar a integral em duas partes, cada uma contendo o limite problemático. Por questões de notação, vamos usar um limite à esquerda da integral e um limite à direita.

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{a\to 0^-}\left(\int_{-2}^{a} \frac{dx}{x^2}\right) + \lim_{b\to 0^+}\left(\int_{b}^{1} \frac{dx}{x^2}\right)$$

Pode parecer trapaça, mas não é. O limite inferior não é mais 4 – agora é um número incrivelmente próximo, mas não exatamente 4. Continue com a integração usando a substituição u com $u = x - 4$ e $du = dx$ (não se esqueça de colocar os limites na equação u para chegar aos limites de u):

$$\lim_{a\to 4^+}\int_{a-4}^{3} u^{-1/2}\,du$$
$$= \lim_{a\to 4^+}\left(2\sqrt{u}\Big|_{a-4}^{3}\right)$$
$$= \lim_{a\to 4^+}\left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{a-4}\right)$$

Já ignoramos os limites por muito tempo. Para finalizar, use o método da substituição que vimos no Capítulo 6:

$$\lim_{a\to 4^+}\left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{a-4}\right) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4-4} = 2\sqrt{3}$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Avalie $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$, mesmo sendo uma integral imprópria.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Algumas integrais difíceis podem ser resolvidas por meio da integração por partes, onde a parte *u* representa uma parte facilmente diferenciável da integral e a parte *dv* representa uma parte facilmente integrada.
- O método tabular para integração por partes torna a técnica bem mais fácil, mas só pode ser aplicado se derivadas sucessivas de *u* se igualarem a 0 no final.
- Se o denominador de uma integral for fatorável, tente quebrar a integral usando a decomposição parcial de fração; as frações menores provavelmente serão mais fáceis de integrar.
- Se uma integral definida tiver o limite de integração ∞ ou uma descontinuidade infinita no intervalo que você deseja integrar, é chamada de integral imprópria e deve ser solucionada usando um limite que substitua o valor problemático.

Capítulo 19

Aplicações da Integração

Neste Capítulo

- Aumente o volume (rotacional)
- Calculando o volume de áreas perfuradas
- Bancando o Noé: encontrando o tamanho da arca
- Superfície de uma área tridimensional

Este capítulo poderia ter vários títulos diferentes. Eu poderia chamá-lo de "Aplicações do Teorema Fundamental", mas já tem outro capítulo com esse nome. Poderia ser "A Vingança das Aplicações do Teorema Fundamental", mas ficaria muito assustador, e talvez precisasse de uma "classificação etária indicativa" na capa do livro. Pelo amor de Deus, este é um livro de cálculo! Qualquer coisa que interfira em sua vendagem é fatal.

Poderia chamá-lo de "Usos da Integral Definida", mas parece mais um comercial de TV. Soa como um vendedor tentando convencê-lo de algo. Desde a última vez que um vendedor de carros ficou olhando pra mim com cara de surpresa por meia hora antes de confessar que estava hipnotizado pela minha "testa enorme", nas palavras dele, tenho agido com cautela com vendedores em geral. Então, optei pelo título sem graça, "Aplicações da Integração".

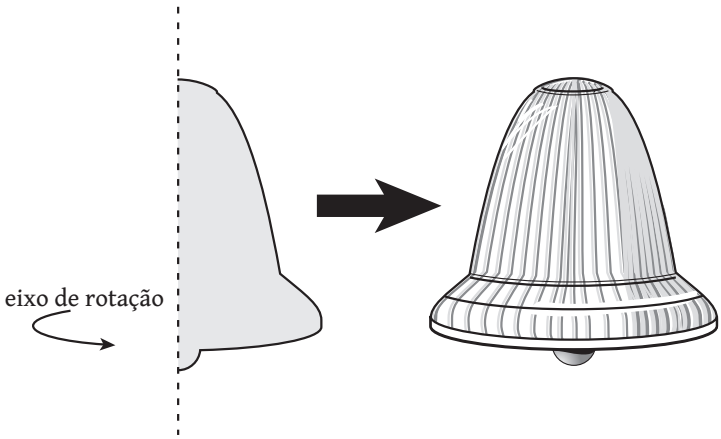
O que você não sabe (se não leu o sumário do livro) é que vamos falar de integrais. Depois que terminar este capítulo, será hora de mergulhar no breve, porém feliz, purgatório entre tópicos, onde as coisas são estranhas, novas e um pouco mais fáceis por algum tempo. Até lá, teremos de memorizar mais algumas fórmulas.

Volume de Sólidos Rotacionais

Você já viu aquelas dobraduras engraçadas, que lembram uma sanfona? A princípio, parecem cartõezinhos planos, mas quando as abrimos, adquirem uma forma tridimensional bem legal. Em geral, são usadas em salões de festa, para decoração, como estalactites nos tetos. Para vocês que nunca foram a festas como essas, ou não fazem ideia do que estou falando (esse tipo de decoração não é mais novidade desde os anos 1970), a Figura 19.1 pode ajudar na visualização.

Figura 19.1

Quando uma forma simples é rotacionada em três dimensões ao redor de um eixo, pode parecer um sino – um lembrete geométrico de igrejas, casamentos e sua incapacidade de se comprometer.



Nosso objetivo é encontrar o volume de formas como essas. Vamos começar com um gráfico de função e rotacionar a área que ele compreende em um eixo horizontal ou vertical, mais ou menos como a área do meio-sino da imagem, cujo eixo rotacional é vertical.

O Método do Disco

Contanto que o sólido rotacional resultante do seu gráfico não tenha nenhum espaço vazio, você pode usar o método do disco para calcular o seu volume. O segredo para esses problemas é encontrar o *raio de rotação*, a distância entre o

eixo de rotação e a extremidade externa da área rotativa. Nesse método, o raio de rotação *sempre* será perpendicular ao eixo de rotação.

É muito fácil localizar e desenhar o raio de rotação, e esse é um passo importante em qualquer problema que envolva sólidos rotacionais. Encontrando-o, você só precisa colocar o valor na fórmula do método do disco $V = \pi\int_a^b \left(r\left(x\right)\right)^2 dx$ (na qual a e b são os limites x da área de rotação).

de•fi•ni•ção

O **raio de rotação** é um segmento linear que se estende do eixo de rotação à extremidade da área de rotação. Se o raio for vertical, significa que todas as funções com as quais você está lidando devem conter variáveis x. Por outro lado, se o raio de rotação for horizontal, você deverá usar funções de y. Esse método parte do princípio que um sólido rotacional sem pontos ocos sempre terá uma secção circular. Em essência, você está integrando a área de secção (que equivale a πr^2, a área de um círculo).

Exemplo 1: Faça a rotação da área limitada por $f(x) = -x^2 + 4$ e pelo eixo de x sobre o eixo de x. Calcule o volume resultante.

Se não conseguir visualizar, o sólido resultante da rotação descrita no exemplo 1 se parece com a Figura 19.2.

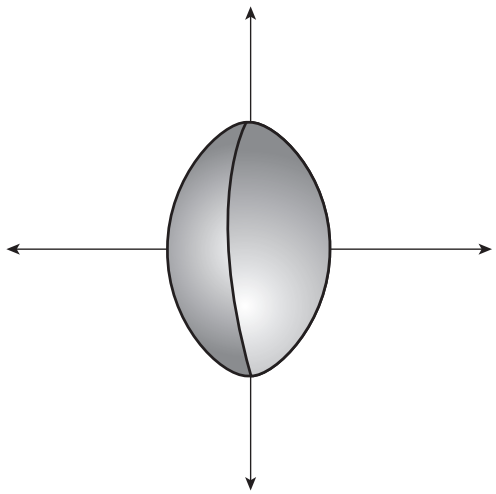


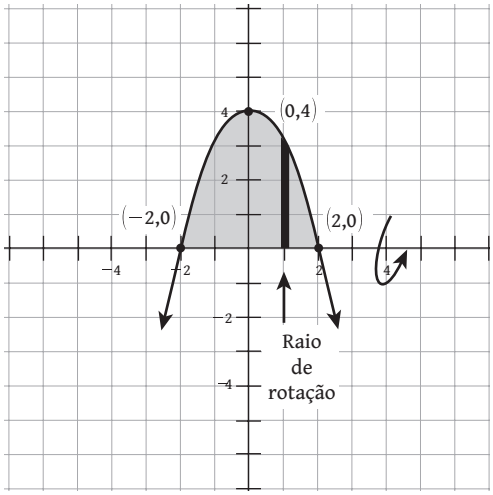
Figura 19.2

Não se preocupe, a sua nota não depende de sua habilidade de desenhar figuras tridimensionais.

Solução: Comece desenhando tudo e encontre o raio de rotação, como na Figura 19.3.

Figura 19.3

O raio de rotação se estende do objeto que é rotacionado até a extremidade da região de rotação.



A área sombreada será rotacionada no eixo *x*. A linha escura é o raio de rotação – que se estende do eixo de rotação (eixo *x*) até a extremidade do gráfico $f(x)$. Embora eu tenha desenhado o raio em $x = 1$, terá a mesma fórmula em qualquer ponto em [–2,2]. Note que o eixo de rotação é perpendicular ao eixo de rotação, que é horizontal.

Encontre a extensão do raio de rotação, $r(x)$, usando o mesmo raciocínio que usava para encontrar a área entre curvas: sua extensão é a curva de cima menos a curva de baixo. Como a curva de cima é $f(x) = -x^2 + 4$ e a curva de baixo é o eixo *x* ($g(x) = 0$), o raio de rotação será $r(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 4 - 0 = -x^2 + 4$.
De acordo com o método do disco, o volume de um sólido rotacional será:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b \Big(r\big(x\big)\Big)^2\,dx \\ &= \pi\int_{-2}^{2}\Big(-x^2+4\Big)^2\,dx \\ &= \pi\int_{-2}^{2}\Big(x^4-8x^2+16\Big)dx \\ &= \frac{512\pi}{15} \end{aligned}$$

Note que o raio de rotação era vertical. Isso indica que você deve usar funções de *x*. Se fosse horizontal, todas as funções seriam de y – $f(y)$ em vez de $f(x)$.

Ponto Crítico

A equação de um semicírculo, com centro em sua origem, com raio *r* é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Se você rotacionar a região abaixo do gráfico dessa equação no eixo de *x* e tratar *r* como um número (é uma constante, não uma variável), você vai obter a equação do volume de uma esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. É daí que vem aquela fórmula danada.

A outra única diferença dos raios horizontais é que você encontra a extensão deles subtraindo a função da esquerda da função da direita, e não a função inferior da superior.

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre o volume do sólido rotacional gerado pela rotação da área do primeiro quadrante delimitada por $y = x^2$, pelo eixo y, e pela linha $y = 9$ em torno do eixo y.

O Método da Rosquinha

Se um sólido de revolução tiver qualquer ponto oco, você terá de usar uma versão modificada do método do disco chamada *método da rosquinha*. Seu nome vem do fato de que as secções parecem rosquinhas (têm buraquinhos no centro). Aliás, esse processo pode não apenas salvar a sua vida, mas também determinar volumes.

Como no método do disco, o raio de rotação no método da rosquinha deve ser perpendicular ao eixo de rotação. Novamente, a orientação do raio vai lhe dar as variáveis para seus cálculos (vertical = x; horizontal = y). A única diferença é que neste novo método você terá dois raios de rotação. Um raio se estende do eixo de rotação à extremidade externa da área em rotação (como antes). Isso se chama *raio externo*. O outro raio de rotação também se origina no eixo rotacional, mas se estende até a extremidade interna da área em rotação; é chamado de *raio interno*. A fórmula do método da rosquinha subtrai o quadrado do raio interno do quadrado do raio externo:

$$V = \pi\int_a^b \left(\left(R(x)\right)^2 - \left(r(x)\right)^2\right) dx$$

de•fi•ni•ção

O **método da rosquinha** é usado para calcular o volume de um sólido rotacional mesmo que ele seja oco em alguma porção. Os **raios externo** e **interno** de rotação são essenciais ao processo; eles se estendem do eixo de rotação até as extremidades mais distantes e mais próximas, respectivamente, da região a ser rotacionada.

Ponto Crítico

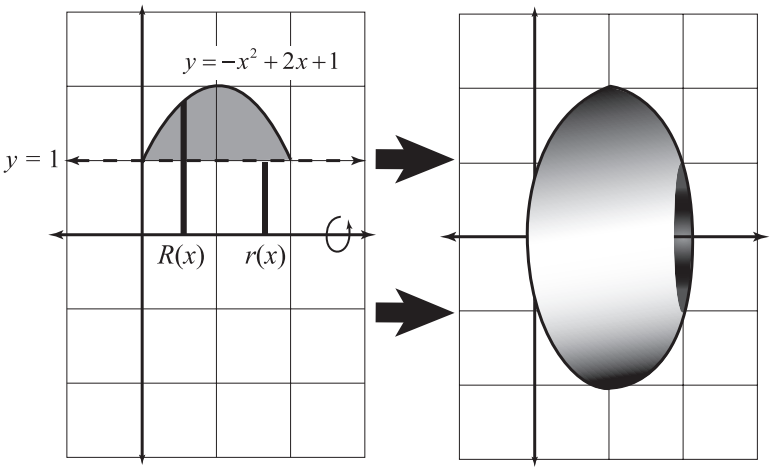
Em essência, o método da rosquinha é o método do disco repetido. Primeiro, calcula-se o volume do sólido, ignorando-se a parte oca $\left(\pi\int_a^b \left(R(x)\right)^2 dx\right)$, encontra-se o volume da parte oca $\left(\pi\int_a^b \left(r(x)\right)^2 dx\right)$ e, então, subtrai-se o volume da parte oca do volume total.

Exemplo 2: Considere a área limitada pelos gráficos de $y = -x^2 + 2x + 1$ e $y = 1$. Que volume teremos se essa área for rotacionada sobre o eixo x?

Solução: Vamos dar uma olhada na Figura 19.4.

Figura 19.4

A rotação dessa área sobre o eixo *x* resulta em algo que não é completamente sólido – possui um buraco de raio 1. É basicamente uma rosquinha matemática.



Como a área sombreada não está exatamente sobre o eixo *x*, o espaço que separa a região do eixo rotacional também é rotacionada, deixando um buraco de raio 1 no sólido. O raio externo, designado por $R(x)$ na figura, estende-se do eixo *x* até a extremidade mais distante da região, enquanto o raio interno, $r(x)$, se estende até a extremidade mais interna da região. Encontre a extensão de cada raio do mesmo jeito que você fez com o método do disco; a equação do limite mais alto menos o limite mais baixo. Lembre-se que o limite de baixo é o eixo *x* e tem a equação $y = 0$:

$$R(x) = -x^2 + 2x + 1 - 0 = -x^2 + 2x + 1$$
$$r(x) = 1 - 0 = 1$$

Para finalmente encontrar a área, coloque tudo na fórmula do método da rosquinha. Como esses gráficos têm um ponto de intersecção em $x = 0$ e $x = 2$, esses são os limites da região e devem ser também os limites de integração:

$$\pi\int_0^2 \left(\left(-x^2 + 2x + 1\right)^2 - \left(1\right)^2\right) dx$$
$$= \pi\int_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x\right) dx$$
$$= \frac{56\pi}{15}$$

Um pequeno alerta: até agora, fizemos rotação exclusivamente nos eixos *x* e *y*. Isso facilita a determinação da extensão dos raios de rotação, já que o limite de baixo tem sido 0, e é muito fácil subtrair 0. No Problema 2, você vai rotacionar algo ao redor de outra coisa, não de um eixo, por isso, seja cauteloso ao calcular os raios de rotação.

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre o volume gerado pela rotação da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$ sobre a linha $y = -1$.

O Método das Cascas Cilíndricas

A última técnica para encontrar volumes rotacionais usa raios *paralelos*, e não perpendiculares, ao eixo de rotação. É fácil lembrar! A outra diferença do método das cascas cilíndricas é o uso de um *raio representativo*, e não um raio de rotação. Em vez de um raio se estender do eixo de rotação até a extremidade da região, ele simplesmente se estende de uma extremidade da região à outra. A fórmula deste método é $V = 2\pi\int_a^b d(x)\cdot h(x)dx$, sendo que $d(x)$ é a distância do raio representativo até o eixo de rotação, $h(x)$ é a extensão do raio e a e b são os limites da área a ser rotacionada.

de•fi•ni•ção

No método das cascas cilíndricas, você usa um **raio representativo** que se estende de uma extremidade da região à outra, e não um raio de rotação que se estende do eixo de rotação a uma extremidade.

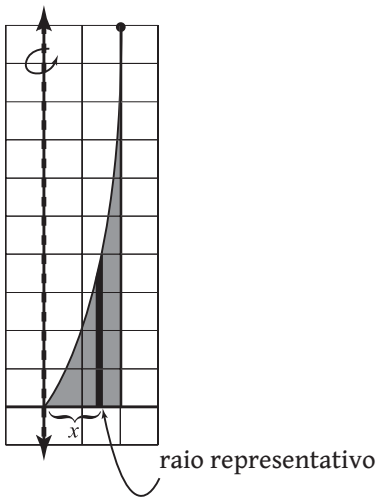
O método das cascas cilíndricas pode ser usado para calcular o volume de um sólido rotativo com ou sem "buracos". Assim, pode ser usado no lugar dos métodos do disco e da rosquinha.

Exemplo 3: Rotacione a área limitada por $y = x^3 + x$, $x = 2$ e pelo eixo x ao redor do eixo y, e calcule o volume do sólido de revolução.

Solução: Como você vai rotacionar ao redor do eixo y, o método da rosquinha pediria raios horizontais (são perpendiculares ao eixo vertical de rotação). Isso significa que tudo deve ser feito em relação a y, e não é nada fácil resolver $y = x^3 + x$ em relação a x. Porém, com o método das cascas cilíndricas você não precisa fazer nenhum tipo de conversão. Desenhe a região com seus raios representativos – deve ser um segmento vertical que passa pela região, já que o eixo de rotação também é vertical (veja a Figura 19.5).

Figura 19.5

Note que o raio agora é paralelo ao eixo rotacional.



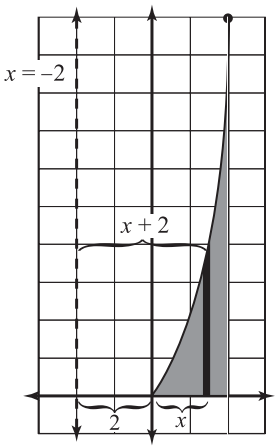
Você pode dizer que o raio é o valor de x unidades à direita a partir da origem, então $d(x) = x$. A altura do raio, $h(x)$, é encontrada subtraindo-se o limite de baixo do limite de cima: $x^3 + x - 0$. Como você está usando todos os valores de x, os limites da região são 0 e 2. Coloque esses valores na fórmula do método das cascas cilíndricas.

$$\begin{aligned} & 2\pi\int_0^2 x \cdot \left(x^3 + x\right) dx \\ &= 2\pi\int_0^2 \left(x^4 + x^2\right) dx \\ &= \frac{272\pi}{15} \end{aligned}$$

Lembre-se que a equação $d(x)$ nem sempre será x; por exemplo, se você rotacionar a região ao redor da linha $x = -2$, vai obter a Figura 19.6.

Figura 19.6

A região é a mesma do Exemplo 3, mas o eixo de rotação mudou.



A extensão da origem ao raio ainda é x, mas há uma distância adicional de 2 ao eixo rotacional, então $d(x) = x + 2$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Calcule o volume gerado pela rotação da área limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$ ao redor do eixo x usando o método das cascas cilíndricas.

Comprimento do Arco

A esta altura, você já consegue fazer qualquer tipo de cálculo matemático maluco. A geometria nos mostrou como encontrar áreas esquisitas, e o cálculo levou essa habilidade ainda mais adiante. Os tipos de área que você pode encontrar agora teriam te deixado completamente atordoado em seus dias de inocência geométrica. Porém, resta uma habilidade matemática de aplicações visíveis e compreensíveis mesmo para aqueles que não sabem a diferença entre cálculo e um sanduíche de atum. Agora, vamos adicionar à sua lista de habilidades como encontrar o comprimento de uma curva. Quando terminar, você poderá provar (finalmente!) que a circunferência de um círculo é realmente 2π.

Equações Retangulares

O termo equações retangulares significa "funções normaizinhas, sem graça e cotidianas". Os matemáticos usam esse termo pela razão óbvia de perderem menos tempo falando um nome mais curto (eles são ocupados demais). Encontrar o comprimento de uma curva (em um intervalo de x) é tão fácil quanto calcular uma integral definida. Na verdade, o comprimento de uma função contínua $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ é igual a $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. Em outras palavras, encontre a derivada da função, eleve ao quadrado, some 1 e integre a raiz quadrada do resultado ao intervalo correto.

Exemplo 4: Encontre o comprimento da função $g(x) = \sqrt{x}$ entre os pontos (1,1) e (16,4) no gráfico.

Solução: Use a regra da potência para encontrar a derivada de $g(x) = x^{1/2}$, e você terá $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Agora é só colocar os valores na fórmula do comprimento do arco:

$$\int_1^{16} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^{16} \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$$

O problema de integração resultante não é nada simples. Para o nosso objetivo, basta saber aplicar a fórmula. Não precisamos nos arriscar com a integral. Você vai descobrir que muitas integrais de comprimento de arco ficam complicadas e requerem alguns métodos avançados de integração. Vamos nos ajudar com uma solução assistida por um computador ou por uma calculadora – eles sim, são bons com integrais definidas complexas. A resposta é aproximadamente 15,3397.

Não pense que você está trapaceando ao usar uma calculadora em vez de resolver o problema com suas próprias mãos. Você teria de conhecer todas as técnicas de integração que existem para encontrar o comprimento de arcos das funções mais simples.

Você Tem Problemas

Problema 4: Qual é a função mais longa no intervalo $[0,2]$: $f(x) = x^2$ ou $g(x) = x^3$?

Equações Paramétricas

Eu ainda não havia mencionado as equações paramétricas – elas estavam escondidas pelas sombras, à espreita, mas agora apareceram para entrar no jogo. Há muitas similaridades entre a fórmula do comprimento do arco de equação paramétrica e do comprimento de arco retangular. Ambas são integrais definidas, envolvem a soma de dois termos sob um radical e buscam a derivada da equação original.

O comprimento do arco de uma curva definida parametricamente é encontrado por meio da integral definida $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$, onde a e b são valores limitantes do parâmetro agora – não de limites de x. Em outras palavras, encontre as derivadas das equações de x e y, eleve-as ao quadrado, some-as e tire a raiz quadrada e integre toda essa meleca.

Alerta do Kelley

Não se confunda pelo fato de o parâmetro do Exemplo 5 não ser t. A fórmula do comprimento do arco com parâmetro θ é exatamente a mesma, mas tem θ em vez de t.

Exemplo 5: A representação paramétrica de um círculo com raio 1 (e centro na origem) é $x = \cos\theta$, $y = \text{sen}\,\theta$. Prove que a circunferência de um círculo é realmente 2π calculando o comprimento do arco da curva paramétrica em $0 \le \theta \le 2\pi$.

Solução: Comece pela derivada das equações de x e y em relação a θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = -\,\text{sen}\,\theta \text{ e } \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$$

Agora, coloque os valores na fórmula de comprimento do arco e simplifique usando o teorema-mãe (corra até o Capítulo 4 se não fizer ideia do que estou falando):

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-\operatorname{sen}\theta\right)^2+\left(\cos\theta\right)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{1}d\theta\\&=\theta\Big|_0^{2\pi}\\&=2\pi-0=2\pi\end{aligned}$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Encontre o comprimento do arco na curva paramétrica definida pelas equações $x = t + 1, y = t^2 - 3$ no intervalo [1,3].

O Mínimo que Você Precisa Saber

- O método do disco é usado para encontrar volumes de sólidos rotacionais sem partes ocas. Se houver qualquer "buraco", é preciso usar o método da rosquinha ou o método da casca cilíndrica.
- Tanto o método do disco como o da rosquinha usam raios de rotação perpendiculares ao eixo de rotação, enquanto os raios representativos usados no método da casca cilíndrica são paralelos ao eixo de rotação.
- O método da rosquinha consiste no método do disco feito duas vezes no mesmo problema.
- Você pode encontrar o comprimento de arcos de curvas retangulares ou paramétricas por meio de fórmulas integrais definidas similares.

Parte 5 Equações Diferenciais, Sequências, Séries e Saudações

Se diferenciação e integração são, respectivamente, as imagens de mãe e pai do cálculo, as sequências e séries são as filhas travessas. Se você olhar bem de perto, pode ver que estão relacionadas. Porém, quando você estiver envolvido com sequências e séries, vai se perguntar como estão ligadas aos seus pais, afinal, e vai desconfiar que possam ter sido adotadas. A integração imprópria foi o mais próximo que você chegou das séries infinitas, mas até elas estão meio longe.

Equações diferenciais, por outro lado, estão obviamente relacionadas com tudo o que você tem feito por aqui. Na verdade, a resolução delas começa como uma simples extensão de integração, e você já é quase um *expert* nisso. Esse processo (chamado de separação de variáveis) nem sempre funciona, mas você vai aprender outros modos de lidar com tais equações.

Finalmente, é hora de guardar as suas anotações, colocar a mochila debaixo da carteira e fazer a prova final para descobrir o quanto aprendeu. Grude os olhos em sua prova!

EU IA COMEÇAR A ESTUDAR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, SEQUÊNCIAS E SÉRIES, MAS RESOLVI FAZER ALGO MENOS ASSUSTADOR; ENTÃO COMECEI A PULAR DE PARAQUEDAS NA SEMANA PASSADA.

Capítulo 20

Equações Diferenciais

Neste Capítulo

- O que são equações diferenciais?
- Separação de variáveis
- Condições iniciais e equações diferenciais
- Modelando crescimento e declínio exponencial

A maioria dos cursos de cálculo discute equações diferenciais, mas de forma bem limitada ao básico. Muitos matemáticos dizem que penaram para resolver equações diferenciais em algum ponto da carreira deles. Isso porque equações diferenciais são extremamente úteis para simular cenários da vida real e, por isso, amplamente usadas por cientistas.

Uma equação diferencial nada mais é do que uma equação contendo uma derivada. Na verdade, você montou mais equações diferenciais do que pensa simplesmente ao encontrar derivadas de funções da primeira metade deste livro. Neste capítulo, vamos começar com as equações diferenciais (a derivada) e trilhar o caminho de volta à equação original. Soa familiar? Basicamente, você vai aplicar métodos de integração, como fez em vários outros capítulos até agora.

Porém, resolver equações diferenciais não é a mesma coisa que integrar. Existem muitas equações diferenciais complicadas (que não serão exploradas aqui). Por sorte, a aplicação de equação diferencial mais popular em cálculo para iniciantes (crescimento e declínio exponencial) requer uma técnica muito simples chamada separação de variáveis. Vamos começar por ela.

Separação de Variáveis

Se uma *equação diferencial* nada mais é do que uma equação contendo uma derivada, e resolvê-la é basicamente a mesma coisa que encontrar uma antiderivada, qual é a dificuldade nisso e por que é um assunto tratado em um tópico separado? O motivo é que elas nem sempre são redondinhas como esta:

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos x + 1$$

de•fi•ni•ção

Equações diferenciais são apenas equações que contêm uma derivada. A maioria das equações diferenciais básicas pode ser resolvida por meio de um método chamado **separação de variáveis**, no qual você move diferentes variáveis para os lados opostos da equação para integrar cada lado separadamente.

Claramente, a solução desta equação é $y = 3\text{sen}\, x + x + C$. Tudo o que você precisa fazer é integrar os dois lados da equação. A maioria das equações diferenciais é meio bagunçada e cheia de variáveis, como esta:

$$\frac{dy}{e^{2x}} = xy\, dx$$

Parece que alguém mastigou um monte de equações e cuspiu por aí aleatoriamente (o que, além de parecer um quebra-cabeças, pode te fazer perder o apetite). Para resolver essa equação diferencial, você terá de separar as variáveis. Ou seja, mova todos os *y* para a esquerda da equação e todos os *x* para a direita. Depois, você poderá integrar os dois lados da equação separadamente. Esse processo – chamado apropriadamente de *separação de variáveis* – resolve qualquer equação diferencial que você encontrar por aí.

Exemplo 1: Encontre a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$, onde k é uma constante.

Solução: Você precisa mover *y* para a esquerda da equação e *dx* para a direita. Como *k* é uma constante, não está muito claro se você deve movê-la ou não. Como regra geral, mova todas as constantes para o lado direito da equação. Seu objetivo é encontrar *y*, então não quer nada que não seja *y* do lado esquerdo. Comece movendo *y*; depois divida os dois lados da equação por *y* para obter:

$$\frac{dy}{y \cdot dx} = k$$

Agora, empurre aquele *dx* para a direita, multiplicando ambos os lados por *dx*:

$$\frac{dy}{y} = k\,dx$$

A esta altura, você pode integrar os dois lados da equação. Como *k* é uma constante, sua antiderivada é *kx*, assim como a antiderivada de 5 seria 5*x*:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$$
$$\ln|y| = kx + C$$

Ainda não acabamos. Sua resposta final deveria ser em relação a *y*. Para cancelar a função logarítmica natural e cumprir essa missão, você precisa usar a função inversa, e^x, assim: $e^{\ln|y|} = e^{kx+C}$. (Jogue fora os sinais de valor absoluto ao redor do *y* agora; eles não são necessários, pois o domínio da função logarítmica natural só tem números positivos. Quando a logarítmica natural desaparecer, deixe os sinais irem com ela.)

Ou seja, reescreva a equação para que os dois lados sejam a potência da função exponencial natural. Isso te dá $y = e^{kx+C}$, pois e^x e ln *x* são funções inversas e, assim, $e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$. Você poderia parar por aqui, mas vamos dar só mais um passo à frente. Lembra da regra básica da exponencial que dizia que $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$? A equação acima se parece com x^{a+b}, então você pode quebrá-la em $x^a \cdot x^b$:

$$y = e^{kx} \cdot e^C$$

Estamos quase no fim, eu prometo. Como você não faz nem ideia do valor de C, também não faz ideia do valor de e^C. Você sabe que será algum número, mas não sabe qual. Como já fez antes, reescreva e^C como C, o que significa que, ainda que não seja o mesmo valor do original C, continua sendo um número desconhecido: $y = Ce^{kx}$.

Essa é a solução da equação diferencial. Demoramos um pouco pra chegar lá, mas é uma equação muito importante, e você vai precisar dela algumas páginas adiante.

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre a solução para a equação diferencial $\left(x^2 - 1\right)dy = \frac{x\,dx}{\cos y}$.

Tipos de Solução

Assim como as integrais, as soluções das equações diferenciais vêm em duas formas: com e sem um termo "+*C*". As integrais definidas não tinham esse termo

porque a resposta final delas era sempre um número, e não uma equação. Enquanto a solução de uma equação diferencial será sempre em forma de uma deliciosa equação (como um punhado de jujubas), em alguns casos você poderá prever exatamente o valor de C, e assim chegará a uma resposta mais específica.

Família de Soluções

Se tudo o que você tem é uma equação diferencial, só pode chegar a uma solução geral. O Exemplo 1 e o Problema 1 são exemplos disso. Lembre-se, a integração nem sempre diz exatamente a antiderivada de uma função, pois quaisquer funções que diferem apenas em uma constante terão a mesma derivada.

A solução de uma equação diferencial contendo um termo "+C" é na verdade uma *família de soluções*, pois, tecnicamente, representa um número infinito de soluções possíveis para tal equação. Pense na equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x + 7$. Se você usar a separação de variáveis, chegará à solução $y = x^2 + 7x + C$. Você pode colocar qualquer número real no lugar de C e o resultado será uma equação diferencial original. Por exemplo, $y = x^2 + 7x + 5$, $y = x^2 + 7x - \frac{105}{13}$ e $y = x^2 + 7x + 4\pi$ têm a derivada de $2x + 7$. As três (mais infinitas outras equações) formam a família de soluções.

de•fi•ni•ção

Qualquer solução matemática contendo "+ C" é chamada de **família de soluções** porque não dá uma resposta específica. Descreve compactamente infinitas soluções, cada uma diferente por uma constante. Os membros de uma família de soluções têm a mesma forma, diferindo apenas em sua posição vertical ao longo do eixo y. Para chegar a uma solução específica, o problema terá de fornecer informações adicionais.

Conhecer uma família de soluções nem sempre é suficiente. As equações diferenciais são geralmente usadas como modelos matemáticos para ilustrar exemplos e situações da vida real. Nesses casos, você terá de encontrar soluções específicas, mas para isso precisará de algumas informações adicionais.

Soluções Específicas

Para determinar exatamente que C é igual a qualquer solução de equação diferencial, você precisa conhecer pelo menos um par coordenado da sua antiderivada. De posse dessa informação, você pode usar o par (x,y) e encontrar C. Para explicar o que quero dizer, criei um exemplo para aqueles programas de TV com provas diversas e prêmios no final.

Eu não sei o que acontece que deixa as pessoas (por pessoas quero dizer eu e minha esposa) tão animadas para assistir ao sofrimento de outras pessoas atirando dados gigantes umas às outras para ganhar uma lavadora de louças, mas isso não nos impede de continuar assistindo a esses programas. Porém, a nova tendência não é mais participar de provas tolas para ganhar prêmios. Agora, eles expõem os participantes ao perigo com vistas a altas quantias de dinheiro.

Exemplo 2: Um novo programa do canal FOX está gerando polêmica. *Velocidade Terminal* suspende os participantes pelos tornozelos em uma corda de *bungee-jump*. Os produtores ainda estão pensando nos detalhes, mas uma das atrações será prendê-los no teto e soltá-los repetidamente em direção ao solo, cada vez aumentando mais a extensão da corda que os segura. O auditório ainda vai jogar coisas neles (como pedrinhas ou outros objetos quando os pontos estiverem muito baixos). Vamos supor que a velocidade de um participante (em m/s) nos primeiros 10 segundos de sua queda seja dada por $\frac{ds}{dt} = -80\,\text{sen}(2t) - 4$. Se a posição inicial do pobre coitado é 40 m do chão, encontre a equação de sua posição.

Solução: Você tem a equação diferencial que representa a velocidade. A solução da equação será a antiderivada da velocidade, posição. O problema também diz que a posição inicial é 40 m de altura. Significa que a posição do participante no tempo 0 é 40, então $s(0) = 40$. Você já vai usar isso para encontrar C; uma coisa de cada vez. Antes, você precisa aplicar a separação de variáveis para resolver a equação diferencial:

$$\int ds = \int(-80\,\text{sen}(2t) - 4)dt$$
$$s(t) = 40\cos(2t) - 4t + C$$

Pronto, você tem a equação da posição. Lembre-se que você deve chegar a 40 se utilizar $t = 0$; faça essa substituição e encontre C com facilidade:

$$40 = 40\cos(2 \cdot 0) - 4 \cdot 0 + C$$
$$40 = 40\cos(0) + C$$
$$40 = 40 \cdot 1 + C$$
$$0 = C$$

Assim, a equação da posição exata é $s(t) = 40\cos(2t) - 4t$

Você Tem Problemas

Problema 2: Uma partícula se move horizontalmente para a frente e para trás ao longo do eixo x, de acordo com uma determinada equação de posição s(t); a aceleração da partícula (em m/s^2) é descrita com precisão pela equação $a(t) = 2t + 5 - \text{sen}\,t$. Se você sabe que a partícula tem velocidade inicial –2 m/s e a posição inicial de 5 m de altura, encontre v(t) (a sua velocidade) e s(t) (a sua posição).

Crescimento e Declínio Exponencial

A maioria das pessoas tem um entendimento intuitivo do que seria *crescimento exponencial*. Basicamente, significa que as coisas estão aumentando descontroladamente, como um vírus altamente contagioso em um filme de terror.

Um infectado transmite o mal para outra, que transmite para outra, e assim por diante. Dois infectados viram quatro, quatro viram oito, oito viram dezesseis, até que uma epidemia é desencadeada e o Jackie Chan entra em ação para salvar o dia – provavelmente com alguns golpes de caratê.

de•fi•ni•ção

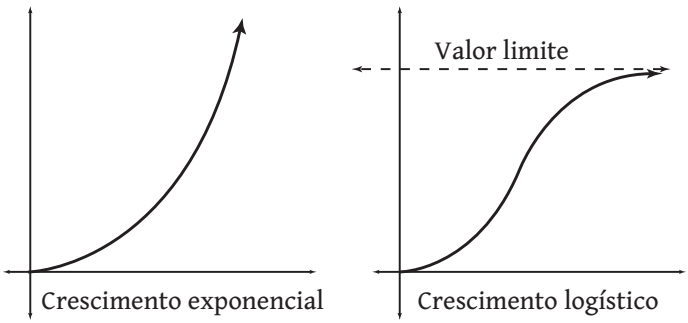
O crescimento exponencial ocorre quando a taxa de variação de uma população é proporcional à própria população. Ou seja, quanto maior a população, maior o seu crescimento (e no caso do declínio exponencial, quanto menor a população, mais lento o crescimento). O **crescimento logístico** começa quase exponencialmente, mas depois o crescimento se torna mais lento e finalmente para, quando a população chega a um valor limite.

Bem, para dizer a verdade, o crescimento exponencial real não acontece com frequencia. Um modelo de crescimento exponencial assume que existe uma quantidade infinita de recursos para avaliar. Em nosso exemplo da epidemia, a taxa de crescimento da doença não pode ser irrestrita, porque no final da avaliação todos já estarão doentes. Para driblar essas restrições, muitos problemas envolvendo crescimento e declínio exponencial lidam com coisas animadoras, tipo crescimento de bactérias. As bactérias são minúsculas, então leva muito tempo até que elas dominem o mundo (Obrigado, Jackie Chan!).

Note que na Figura 20.1, a curva de crescimento logístico tem a concavidade alterada (para cima e para baixo) mais ou menos na metade do intervalo. Essa mudança indica o ponto onde o crescimento começa a diminuir.

Figura 20.1

Dois tipos de crescimento. Nenhum deles explica o crescimento daquela verruga esquisita no seu pescoço.



Um exemplo mais realístico de crescimento e declínio é o *crescimento logístico*. Neste modelo, o crescimento começa rapidamente (basicamente parece exponencial) e então vai diminuindo ao encontrar um fator limitante (como o nosso vírus, que só poderia ser transmitido por aí antes que todos morressem – que pensamento agradável, não?). Embora não esteja além de nossa capacidade examinar o crescimento logístico, é bem mais complicado entender e fazer um modelo, então vamos continuar com o crescimento exponencial.

Matematicamente, o crescimento exponencial é bem claro. Dizemos que uma população apresenta crescimento exponencial se sua taxa de variação é diretamente proporcional à própria população. Assim, a população P cresce (ou apresenta um declínio) exponencialmente se $\frac{dP}{dt}$ e P são proporcionais um ao outro. Então, a

rapidez com que algo cresce ou declina é baseada na quantidade. Sem entrar em muitos detalhes (tarde demais para isso, não?), vamos dizer que essas duas coisas são proporcionais quando são iguais, se um dos termos é multiplicado por uma constante (por exemplo, uma coisa é duas ou cinco vezes maior do que a outra).

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P$$

Reconhece isso? Sim, é o Exemplo 1! Como você já resolveu essa equação diferencial antes, você já sabe que a população que apresenta crescimento exponencial é representada pela equação:

$$y = Ne^{kt}$$

(Eu sei que usei "*C*" como constante antes, mas eu gosto mais do "*N*" porque, quando lemos a fórmula, parece que está escrito "Nu" e eu sou imaturo a ponto de achar isso engraçado). Nessa fórmula, *N* representa a população inicial, *k* é a constante de proporção, e *t* é o tempo (o *e* é só o número de Euler, e eu sei que você já o viu por aí à espreita – não é uma variável. Em geral, as calculadoras, principalmente as científicas, têm um botão para o número de Euler, então não se preocupe em memorizar). O *y* representa a população total depois que o tempo *t* passou.

Ponto Crítico

Você usa a mesma fórmula para crescimento e declínio exponencial. A única diferença é que *k* será negativo em problemas de declínio e positivo em problemas de crescimento.

Em grande parte dos problemas que envolvem crescimento ou declínio exponencial, o primeiro passo é encontrar *k*, pois quase nunca é possível determinar *k* com base no problema. Nem tente adivinhar *k* – quase nunca é um número óbvio. Por exemplo, se a população cresceu na sequência 2, 4, 8, 16, 32, etc, você tende a pensar que *k* = 2, já que a população dobra constantemente, mas na verdade k ≈ 0,693147, que na verdade é 1n 2.

Ponto Crítico

É fácil ver por que *N* representa a população inicial. No Exemplo 3, você sabe que inicialmente (por exemplo, quando $t = 0$) a população é de 19. Substituindo em $y = Ne^{kt}$, você obtém $19 = Ne^{k \cdot 0}$. O expoente de e é 0, e qualquer valor elevado a 0 é 1. Assim, a equação fica $19 = N \cdot 1$. Em vez de fazer isso em cada problema, você pode substituir o valor inicial automaticamente.

Exemplo 3: Antes mesmo que o filme *A Corrente do Bem* fosse lançado, o movimento promovido pela história nunca foi realmente engajado. A premissa era que você deveria fazer um grande favor a três pessoas diferentes – algo que elas não pudessem realizar sozinhas. Essas três pessoas, por sua vez,

fariam outros favores a outras três pessoas, e assim por diante. Infelizmente, um novo movimento chamado "Corrente dos Tapas" está dominando as ruas. A premissa é a mesma, mas com tapas em vez de favores. No primeiro dia, 19 pessoas se envolveram em brigas. Depois de 10 dias, 193 pessoas haviam dado tapas umas nas outras. Quantas pessoas estarão envolvidas nessa corrente 30 dias depois do seu início, assumindo-se que o crescimento exponencial ocorre com o passar do tempo?

Solução: Use a fórmula do crescimento e declínio exponencial $y = Ne^{kt}$. N representa a população inicial (19). Você sabe que 10 dias depois, a nova população compreende 193 pessoas. Assim, quando $t = 10$, $y = 193$. Coloque os valores na fórmula e encontre k:

$$y = Ne^{kt}$$
$$193 = 19e^{10k}$$
$$\frac{193}{19} = e^{10k}$$
$$\ln\left(\frac{193}{19}\right) = 10k$$
$$\frac{\ln\left(\frac{193}{19}\right)}{10} = k$$
$$k \approx 0{,}231825$$

Assim, o modelo do crescimento exponencial é $y = 19e^{0,231825t}$. Para encontrar a população após os 30 primeiros dias, coloque $t = 30$:

$$y = 19e^{0,231825(30)}$$
$$y \approx 19914{,}2$$

Aproximadamente 19.914 pessoas deram (e possivelmente levaram) tapas na sociedade da "Corrente dos Tapas" depois de um mês. É um mundo totalmente novo, meu amigo.

Você Tem Problemas

Problema 3: Aquelas lojas de departamentos imensas sempre vendem seus produtos em quantidades gigantescas. Só Deus sabe o que passou pela sua cabeça quando decidiu comprar 15.000 gramas de lixo radioativo Radon-222. Mas, de qualquer forma, foi um grande erro derramar tudo no chão do estacionamento. Todo resíduo radioativo tem um meia-vida definida – o período que leva até que metade da massa da substância se decomponha. A meia-vida do Radon-222 é 3,82 dias (ou seja, 3,82 dias depois de ter sido deixado no asfalto, 7.500 gramas permanecem, e apenas 3.750 gramas depois de mais 3,82 dias). Quanto tempo vai levar aproximadamente para que15.000 gramas de Radon-222 tenham um declínio para a quantidade inofensiva de 50 gramas?

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Equações diferenciais contêm derivadas; as soluções para essas equações diferenciais básicas são simplesmente as antiderivadas resolvidas em relação a y.
- Se um problema lhe dá informações suficientes, é possível encontrar uma solução específica para uma equação diferencial; não haverá um termo "$+ C$".
- Se a taxa de crescimento ou declínio de uma população for proporcional ao seu tamanho, o crescimento ou declínio é uma exponencial natural.
- Crescimento e declínio exponencial são representados pela equação $y = Ne^{kt}$.

Capítulo 21

Visualizando Equações Diferenciais

Neste Capítulo

- Aproximando valores de funções com tangentes
- Campos de direção: impressões digitais funcionais
- O Método de Euler para resolver equações diferenciais

O nosso breve encontro com as equações diferenciais está quase no fim. Como um navio cruzando o horizonte à noite, vamos seguir nossos caminhos em breve, e você ficará com todas as lembranças. Mas, antes que você fique nostálgico, temos que discutir alguns tópicos ligeiramente mais complexos relacionados às equações diferenciais.

Vamos começar com aproximação linear, e que na verdade já poderíamos ter discutido no Capítulo 9, já que é basicamente um olhar mais aprofundado nas linhas tangentes. Porém, é um precursor para um tópico mais complexo chamado Método de Euler, um jeito aritmético "pesado" de resolver equações diferenciais quando não se pode usar a separação de variáveis. É uma boa técnica de aproximação para se ter em mãos, porque existem pelo menos 10 trilhões de outras formas de resolver equações diferenciais que desconhecemos neste nível de maturidade matemática em que nos encontramos.

Também vamos nos divertir com os campos de direção. Eles são exatamente o que o nome diz: um campo com pequenas linhas inclinadas, como uma horta. Ao examinar a nossa horta, conseguimos dizer muito sobre a solução de uma equação diferencial. Enfim, este capítulo foca as formas de ampliar nosso entendimento acerca das equações diferenciais sem termos de aprender mais matemática ainda no processo. Você tem que gostar disso!

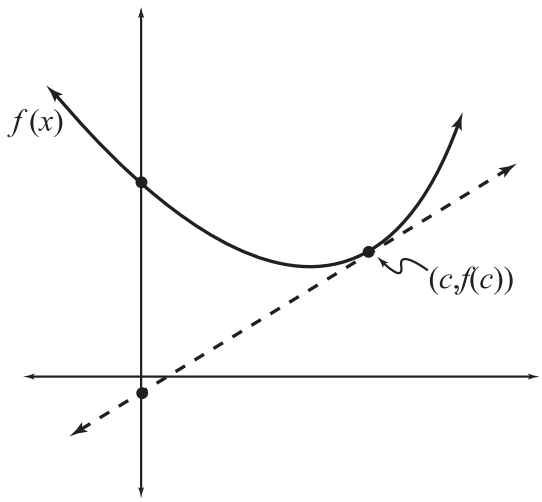
Aproximação Linear

Nós encontramos derivadas como loucos ao longo deste livro. Mesmo que a derivada seja a inclinação de uma tangente, nós demoramos um pouco até nos darmos conta de que isso poderia ser uma coisa remotamente útil. Nós também aprendemos que as derivadas descrevem taxas de variação e podem ser usadas para otimizar funções, entre outras coisas.

Vamos adicionar algo novo à lista de como as derivadas são tediosamente úteis. Dê uma olhada no gráfico de uma função $f(x)$ e sua tangente no ponto $(c, f(c))$ na Figura 21.1.

Figura 21.1

Os gráficos estão bem próximos um do outro em $x = c$, mas quanto mais longe ficam do ponto de tangência, mais se separam. A linha, por exemplo, não daria um bom valor aproximado de $f(0)$. O ponto de intersecção da linha com y é negativo, mas a função é positiva quando $x = 0$.



Note como o gráfico de f e a tangente se aproximam perto de $x = c$. Se você colocasse um valor de x bem próximo de c em ambas as funções, você chegaria ao mesmo resultado.

Como a equação de uma tangente de uma função tem valores que geralmente se aproximam muito da função perto do ponto de tangência, tal equação tangencial é uma boa *aproximação linear* para a função. Não importa o quanto uma função

seja simples de se avaliar, poucas delas são mais simples do que a equação de uma linha. Além disso, algumas funções são muito difíceis de avaliar sem uma calculadora, e nesses casos as aproximações lineares são muito úteis.

de•fi•ni•ção

Aproximação linear é a equação de uma tangente para uma função usada para aproximar os valores da função que se encontram próximos do ponto de tangência.

Exemplo 1: Estime o valor de ln(1.1) usando aproximação linear para $f(x) = \ln x$ com centro em $x = 1$.

Solução: O problema pede que você centralize a sua aproximação linear em $x = 1$. Isso significa que você precisa encontrar a equação da tangente de $f(x)$ nesse valor de x. É fácil construir a equação de uma tangente – você já fez isso no Capítulo 10. Você só precisa da inclinação da tangente, que é $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$, e do ponto de tangência, que é $f(1) = \ln 1 = 0$. Com essas informações, use a equação ponto-inclinação para construir a tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 1(x - 1)$$
$$y = x - 1$$

Alerta do Kelley

Lembre-se: Apenas use a aproximação linear para valores de x próximos do x em que a aproximação foi centralizada. Note que a aproximação no Exemplo 1 fornece uma aproximação terrível de $\ln x$ quando $x = \frac{1}{8}$: –0,87. O real valor de $\ln \frac{1}{8}$ é –2,079.

Isso é bem impreciso, ainda que $\frac{1}{8}$ esteja menos de uma unidade afastado do centro da aproximação!

Agora coloque $x = 1{,}1$ na equação linear; você vai obter $y = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$. O valor real de ln(1,1) é 0,09531, então a sua estimativa está bem próxima.

Você Tem Problemas

Problema 1: Estime o valor de arco-tangente (1,9) usando uma aproximação linear a partir de $x = 2$.

Campos de Direção

Mesmo que não consiga resolver uma equação diferencial, você ainda pode ter uma ideia de como será o gráfico da solução. Você acabou de aprender que o gráfico de uma tangente se parece bastante com o gráfico próximo do ponto de tangência. Bem, se você desenhar pedacinhos de tangente pelo plano coordenado, eles mostrarão a forma do gráfico da solução. É como usar detectores para determinar onde estão os campos magnéticos, ou como jogar uma substância sobre uma mesa para destacar as impressões digitais deixadas ali.

Desenhar *campos de direção* é um processo muito simples para equações diferenciais básicas, mas pode se tornar um pouco repetitivo. Você só precisa substituir pontos do plano coordenado na equação diferencial. Lembre-se que a equação diferencial representa a inclinação do gráfico de uma solução, pois é a primeira derivada. Depois, você vai desenhar um pequeno segmento linear a partir do ponto com a inclinação que você calculou.

de•fi•ni•ção

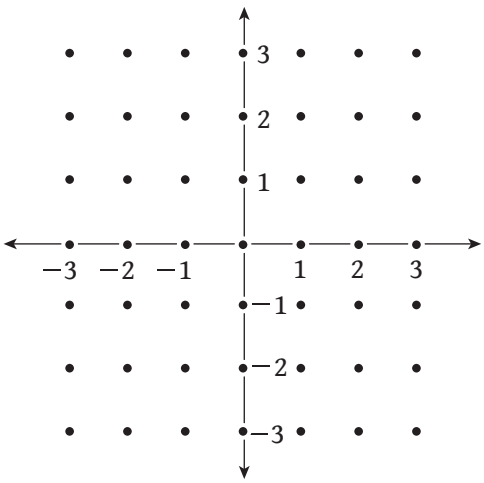
Campo de direção é uma ferramenta que ajuda a visualizar a solução de uma equação diferencial. É constituído por segmentos lineares centrados em pontos cujas inclinações são os valores da equação diferencial avaliada nesses pontos.

Vamos começar com um exemplo bem básico: $\frac{dy}{dx} = 2x$. Você sabe que a solução dessa equação diferencial é $y = x^2 + C$, uma família de parábolas com seus vértices no eixo y.

Vamos desenhar um campo de direção para $\frac{dy}{dx} = 2x$. Antes disso, vamos identificar o campo fértil onde as direções podem crescer e florescer (veja a Figura 21.2).

Figura 21.2

Cada ponto indicado tem números inteiros como coordenadas; isso torna a substituição um pouco mais rápida e fácil.



Em cada ponto nesse campo, você vai desenhar um segmento pequenino. Vamos começar na origem. Se você colocar (0,0) em $\frac{dy}{dx} = 2x$, terá $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 0 = 0$,

então a inclinação da linha tangente será 0 (porque a linha é horizontal). Portanto, desenhe um pequeno segmento horizontal a partir da origem. A substituição foi bem fácil – você não precisou colocar o valor de *y* porque não há *y* na equação diferencial.

Agora, você deve fazer a mesma coisa com todos os pontos da Figura 21.2. Vamos fazer mais um juntos para ter certeza de que você aprendeu. Só por diversão, vou escolher o ponto (1,2) – não soa engraçado? Se você colocá-lo na equação diferencial, vai obter $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 = 2$. Assim, o segmento linear com centro em (1,2) terá inclinação 2. Depois que colocar todos esses pontos na equação diferencial, você deve obter algo parecido com a Figura 21.3.

Ponto Crítico

Como uma regra de ouro, uma inclinação 1 significa segmento com ângulo de 45 graus. Inclinações maiores serão mais íngremes e inclinações menores serão mais rasas. Inclinações negativas cairão da esquerda para a direita, enquanto inclinações positivas subirão da esquerda para a direita.

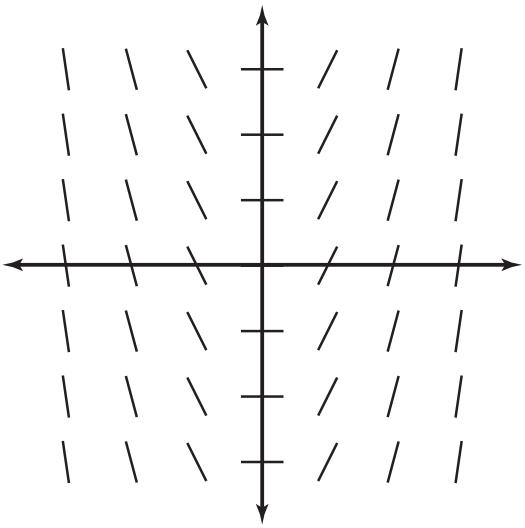


Figura 21.3

Campo de direção com um indício de parábola.

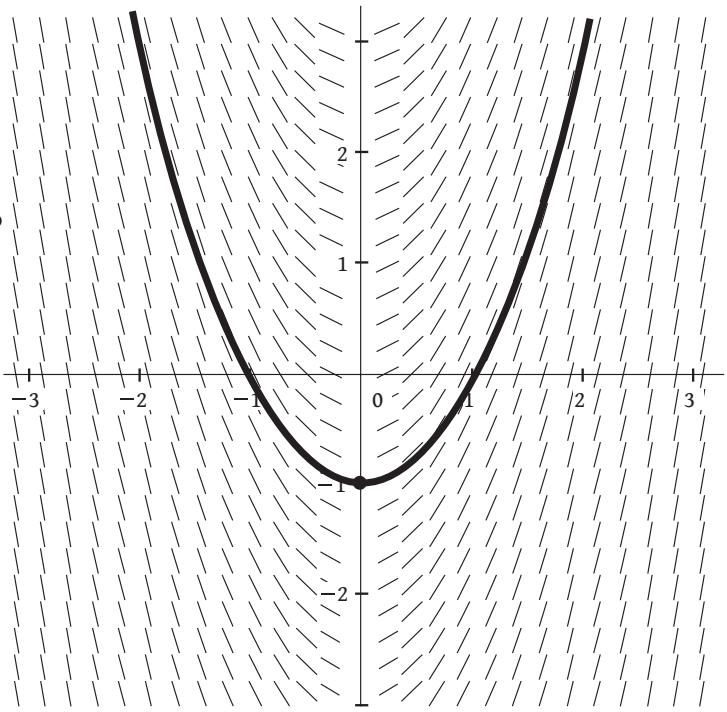
Alerta do Kelley

Um campo de direção sempre designará uma família de soluções. Se você tiver um ponto no gráfico da solução, coloque o seu lápis ali e siga os caminhos traçados pelos segmentos de inclinação para chegar a um gráfico aproximado da solução específica. Não é um método exato para se obter um gráfico custe o que custar. Mas em breve você vai aprender o Método de Euler, e isso vai ajudá-lo a encontrar soluções mais exatas para equações diferenciais insolúveis.

Você consegue ver a forma que se esconde por trás de todos esses risquinhos? Não é perfeito, mas esses pequenos segmentos são muito bons em esboçar o formato de uma parábola cujo vértice está no eixo de *y*. O campo de direções traça a forma da curva de sua solução. Se você usar um computador para fazer o campo de direção, a forma ficará ainda mais nítida (os computadores não se cansam tão facilmente como eu para colocar esses pontos; eles nem se importam com frações). Por exemplo, a Figura 21.4 é um campo de direção gerado por computador para $\frac{dy}{dx} = 2x$ com uma solução específica. Dá para ver como ele esboça bem a solução.

Figura 21.4

Embora uma parábola seja desenhada como uma solução possível, é fácil ver que há muitas parábolas possíveis escondidas ali. O gráfico da solução assume que o ponto (0,-1) é um ponto na solução.



Ponto Crítico

Você pode baixar na internet um programa fantástico chamado *Graphmatica*. Ele desenha campos de direção no computador. Baixe em www.graphmatica.com.

Novamente, esse é um outro campo de direção bem detalhado; o computador calcula inclinações em diferentes coordenadas fracionárias tão bem quanto com coordenadas inteiras. Se você já sabe que a solução dessa equação contém o ponto (0,-1), você tem uma solução específica representada pelo gráfico escuro.

Campos de direção são mais úteis quando você não consegue resolver a equação diferencial por separação de variáveis, mas ainda quer saber como é o gráfico da solução. Há muitas equações diferenciais que não conseguimos resolver a esta altura de nossa jornada rumo ao esclarecimento matemático, por isso é bom recrutar tantos aliados quanto pudermos.

Você Tem Problemas

Problema 2: Desenhe o campo de direção de $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ e faça um esboço da solução específica da equação diferencial que contém o ponto (0,1).

Método de Euler

Para entender o que o *Método de Euler* realmente faz no mundo das equações diferenciais, vamos falar de exploração de florestas. Para dizer a verdade, não sou muito fã do mundo lá fora. Fico feliz dentro de casa com o ar-condicionado, longe de insetos, carrapatos e aranhas que botam ovos em nossa pele que chegam ao nosso cérebro. Talvez você diga que essas aranhas não existem, e provavelmente está certo, mas nunca ninguém teve problemas por excesso de cuidado.

de•fi•ni•ção

○ **Método de Euler** é uma técnica usada para aproximar valores no gráfico da solução de uma equação diferencial quando não se pode encontrar a solução específica por separação de variáveis. Aliás, lê-se *OI-ler* e não *EU-ler*.

Quando eu era mais novo, era diferente. Sempre gostei de brincar lá fora e voltava para casa sujo como nunca, coberto de lama, areia, grama e insetos esmagados. Eu gostava particularmente de explorar bosques com meus amigos. Na maioria das vezes, explorávamos áreas que já conhecíamos perfeitamente bem. Tínhamos até mapas das regiões, se bem que quase nunca recorríamos a eles. Em lugares novos ou desconhecidos, usávamos uma bússola para nos guiar a um caminho que conhecêssemos: "Certo, se nos perdermos, vamos para o oeste e nos encontramos naquele tronco de árvore cortada onde o John perdeu o sapato no ano passado; cuidado com as aranhas que botam ovos no cérebro pelo caminho."

Quando você resolve uma equação diferencial por separação de variáveis, você recebe um mapa para as soluções corretas. Na verdade, o caminho correto a seguir é o gráfico da solução. Voltando ao nosso exemplo simples: se a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ contiver o ponto (3,6), você pode encontrar facilmente a solução exata por meio da separação de variáveis. A antiderivada será $y = x^2 + C$, e você pode usar o par coordenado para encontrar C:

$$6 = 3^2 + C$$
$$6 = 9 + C$$
$$-3 = C$$

Assim, a solução exata da equação diferencial é $y = x^2 - 3$. Agora que você tem essa solução, ela mostra o caminho para outros valores no gráfico da solução. Por

exemplo, é muito fácil determinar o valor de $y(4)$ (a imagem do gráfico quando você usa $x = 4$):

$$y = x^2 - 3$$
$$y(4) = 4^2 - 3 = 16 - 3$$
$$y(4) = 13$$

Esse gráfico "mapa" da solução facilita a determinação do valor correto de y correspondente a qualquer valor de x. Mas e se você não conseguir resolver a equação diferencial por separação de variáveis? Em vez de um mapa, você vai usar a bússola do Euler.

Você ainda vai ter um ponto na curva da solução nesses problemas, mas não poderá usá-los para encontrar C. Em vez disso, você vai usar como ponto de referência ("Se você se perder, corra para o oeste e me encontre no tronco devorador de sapatos"). De lá, você vai se apoiar na bússola ("Acho melhor irmos para o norte – aquela árvore que parece o Scooby Doo fica a norte daqui"). Depois de ter percorrido uma distância fixa, vai olhar novamente para a bússola ("Certo, chegamos à árvore; agora vamos para nordeste, onde tem aqueles sapos"). Após cada jornada curta (sempre que chegar a esses marcos), você vai ler a bússola para ter certeza de que está no caminho certo e verdadeiro. Afinal, você está explorando terras desconhecidas sem um mapa, e há aranhas perigosas por todos os lados. É melhor continuar consultando a sua bússola.

Lembre-se de que uma função e sua tangente têm valores quase iguais perto do ponto de tangência. Isso é essencial no Método de Euler. Utilizar uma bússola na floresta é o mesmo que encontrar a derivada correta da função dada. Depois, vamos andar cuidadosamente pela inclinação por um tempo determinado. Se formos longe demais, os valores da inclinação vão ficar muito diferentes dos valores da função (e não temos um mapa dela). Então, vamos checar novamente a derivada e começar a descer nessa nova direção. Não se esqueça de que não conhecemos a trilha correta, mas as derivadas vão nos manter o mais próximo dela possível.

Antes que possamos realmente usar o Método de Euler, precisamos de algumas habilidades pré-requisitadas. Digamos que você esteja no ponto (0,3) e queira caminhar por uma determinada linha que passa por ele. Se essa linha tiver inclinação $m = \frac{2}{5}$, andar duas unidades para cima e cinco unidades para a direita – chegando ao ponto (5,5) – garante que você permaneça na linha. Mas e se você só quiser andar $\frac{1}{3}$ de unidade para cima? Quantas unidades você teria de ir para a direita para continuar nessa linha?

Exemplo 2: A linha l passa pelo ponto (0,3) e tem inclinação $m = \frac{2}{5}$. Sem encontrar a equação da linha l, encontre o *y* correto no par coordenado $\left(\frac{1}{3}, y\right)$ se esse ponto também estiver na linha l.

Solução: O ponto $(\frac{1}{3}, y)$ está exatamente a $\frac{1}{3}$ de unidade para a direita do ponto original (0,3), então você pode dizer que a mudança em *x* é de $\frac{1}{3}$ do primeiro ao segundo ponto. Matematicamente, escreve-se $\Delta x = \frac{1}{3}$.
Você só precisa encontrar o Δy correspondente para determinar até onde deve ir verticalmente a partir do valor de *y* original 3. Lembre-se de que, de acordo com a equação da inclinação que você aprendeu em sua infância matemática, a inclinação é igual à variação em y dividida pela variação em *x*: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Use essa equação para encontrar o Δy correto:

Ponto Crítico

No Exemplo 2, você está aprendendo a usar uma bússola $\left(m = \frac{2}{5}\right)$ para percorrer uma distância curta $\left(x = \frac{1}{3}\right)$ e, ainda assim, continuar no caminho correto.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{\Delta y}{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta y = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

De acordo com isso, você precisa subir $\frac{2}{15}$ de uma unidade a partir do valor de *y* original 3 para se manter na linha. Como $3 + \frac{2}{15} = \frac{45}{15} + \frac{2}{15} = \frac{47}{15}$, o ponto $\left(\frac{1}{3}, \frac{47}{15}\right)$ está garantidamente na linha que passa por (0,3), cuja inclinação é $\frac{2}{5}$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Se você começar pelo ponto (–1,4) e proceder pela direita uma distância de $\Delta x = \frac{1}{2}$ ao longo de uma linha com inclinação $m = -\frac{2}{3}$, a que ponto você chega?

Agora vamos mesmo usar o Método de Euler. Os problemas de Euler fornecem uma equação diferencial, um ponto inicial e um valor que precisa ser estimado na curva da solução. Ele vai lhe dizer quantos passos de qual extensão você deve usar, e você fará isso usando o mesmo método do Exemplo 2.

Exemplo 3: Use o Método de Euler com três passos de extensão $\Delta x = \frac{1}{3}$ para aproximar *y*(3) se $\frac{dy}{dx} = x + y$ e o ponto (2,1) aparecer no gráfico da solução.

Solução: Deve estar claro por que a extensão desses passos é $\Delta x = \frac{1}{3}$. Você está indo de $x = 2$ para $x = 3$ em três passos. O mesmo processo será repetido três vezes, uma para cada passo.

Primeiro passo: de $x = 2$ a $x = \frac{7}{3}$ (ou $2\frac{1}{3}$).

Alerta do Kelley

Quanto mais passos você dá (ou seja, quanto menor a extensão de cada passo), mais precisa se torna a aproximação final. Mas mesmo com passos largos, o método de Euler fica confuso rapidamente; as frações feiosas aparecem e fica cada vez mais fácil cometer um erro aritmético. É melhor verificar o seu trabalho com a ajuda de uma calculadora.

A inclinação da tangente no ponto (2,1) é

$$\frac{dy}{dx} = x + y = 2 + 1 = 3$$

Use essa inclinação para calcular o valor correto de Δy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$3 = \frac{\Delta y}{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta y = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Isso pede que você suba uma unidade de $y = 1$ enquanto vai $\frac{1}{3}$ para a direita de $x = 2$:

$$\left(2 + \frac{1}{3}, 1 + 1\right) = \left(\frac{7}{3}, 2\right)$$

Segundo passo: de $x = \frac{7}{3}$ para $x = \frac{8}{3}$.

Repita o mesmo processo de antes, mas use o ponto inicial $\left(\frac{7}{3}, 2\right)$ em vez de (2,1). Dessa vez, a inclinação da tangente é $\frac{dy}{dx} = x + y = \frac{7}{3} + 2 = \frac{13}{3}$ enquanto Δx permanece $\frac{1}{3}$. Encontre Δy:

$$\frac{13}{3} = \frac{\Delta y}{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta y = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$$

Então, o ponto inicial para o último passo será:

$$\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3}, 2 + \frac{13}{9}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{31}{9}\right)$$

Terceiro passo: de $x = \frac{8}{3}$ para $x = 3$.

Agora, a inclinação da tangente é $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3} + \frac{31}{9} = \frac{55}{9}$; novamente, use-a para descobrir que $\Delta y = \frac{55}{27}$. Adicione Δx e Δy a $\left(\frac{8}{3}, \frac{31}{9}\right)$: $\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}, \frac{31}{9} + \frac{55}{27}\right) = \left(3, \frac{148}{27}\right)$.

De acordo com o Método de Euler, a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x + y$ em $x = 3$ é aproximadamente $\frac{148}{27}$, ou 5,481.

Você Tem Problemas

Problema 4: Use o Método de Euler com três passos de tamanho $\Delta x = \frac{1}{3}$ para aproximar $y(1)$ se $\frac{dy}{dx} = 2x - y$, sendo que o gráfico da solução passa pela origem.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Uma equação e sua tangente têm valores similares perto do ponto de tangência.
- Campos de direção são coleções de pequenas tangentes espalhadas por um plano coordenado que traçam os gráficos das soluções de equações diferenciais.
- O Método de Euler é usado para aproximar soluções de equações diferenciais por meio de aproximação linear.

Capítulo 22

Sequências e Séries

Neste capítulo

- Sequências: muito mais do que listas de números
- Será que sequências têm limites?
- A diferença entre sequências e séries
- Entendendo séries muito simples

É como dizem nos circos: "Respeitável público", é hora de algo totalmente novo: sequências e séries. Sempre achei estranho que um tópico completamente sem relação com cálculo fosse introduzido no final de um curso básico de cálculo, mas sempre foi assim e assim sempre será. Talvez seja um exagero dizer que um estudo breve desse assunto é *completamente* sem relação com o resto. Você vai ver limites (na verdade, vamos ver limites no infinito, algo sempre divertido), e uma mixaria sobre integração também. Porém, esses capítulos finais com certeza deixarão um gostinho diferente na sua boca em relação aos outros.

Sequências e séries são sempre os tópicos menos compreendidos e mais rapidamente esquecidos pelos estudantes. Isso acontece principalmente porque eles só aparecem no final do curso, quando os alunos já estão cansados de aprender coisas novas e (infelizmente) quando os professores também já não aguentam mais falar sobre o assunto.

Não é que este capítulo seja difícil de entender, cheio de armadilhas ou pouco interessante. Na verdade, algumas das coisas que você vai aprender são absolutamente fascinantes, mas só depende de você continuar se dedicando e mantendo o foco no curso. Muitos alunos excepcionais de cálculo se tornam presas fáceis neste último estágio do jogo. Não deixe que isso aconteça com você!

O que É uma Sequência?

Quando eu estava no ginásio, eu adorava problemas de lógica. Você sabe, aqueles que diziam "encontre o número seguinte da sequência: 1, 3, 5, 7...". Depois de considerar por um tempo, você via que o próximo número da sequência seria 36 (ah, é brincadeira – é 9). Sem que você soubesse, você estava explorando uma *sequência* matemática muito básica.

definição

Uma **sequência** é uma lista de números gerada por uma regra matemática tipicamente expressa em termos de n. Para construir a sequência, você substitui n por valores inteiros relativos consecutivos.

Uma sequência é uma lista ou coleção de números gerada por alguma regra definida. Pode ser escrita em forma de lista, como a sequência que acabamos de ver, ou entre chaves, usando a variável n. Por exemplo, a sequência de números inteiros relativos ímpares gerada pela sequência $\{2n-1\}$. Veja como a sequência se desenvolve quando você coloca valores inteiros relativos no lugar de n, a começar por 1:

$$(2(1)-1), (2(2)-1), (2(3)-1), (2(4)-1), (2(5)-1), \ldots$$
$$= 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

Como eu sabia que tinha de usar esse padrão para gerar números inteiros relativos ímpares? Bem, qualquer coisa vezes dois deve resultar em um número par, e se eu subtraio 1 de um número par, o resultado é sempre um número ímpar. Às vezes, a armadilha das sequências é tentar descobrir a regra definida a partir apenas de uma lista de termos na sequência. Você só precisa de prática (isso você terá dentro de instantes) e um instinto aguçado em relação a padrões.

Alerta do Kelley

Você pode se perguntar: "Posso começar com 0 (ou qualquer outro número que não seja 1) para escrever uma sequência se ela estiver escrita entre chaves?" A resposta é: Não se preocupe com coisas sem importância. Quando discutimos sequência, geralmente nos preocupamos com o comportamento do milésimo elemento, não dos dois ou três primeiros. O foco está no padrão, não em onde ele começa. Mas no caso das séries, não é bem assim – falaremos disso no momento apropriado.

Convergência da Sequência

O seu primeiro objetivo ao lidar com sequências será determinar se elas *convergem*. Se uma sequência for convergente, os termos sempre se aproximarão,

mas nunca alcançarão, de um número real limite. A palavra-chave é "limite", porque você vai usar um limite no infinito para determinar se a sequência converge. Isso facilita muito o processo, pois você já brincou pra valer com limites no infinito, então ainda não tem nenhum conceito novo.

Matematicamente, dizemos que a sequência $\{a_n\}$ converge se existir $\lim_{n\to\infty} a_n$. Isso faz muito sentido. Em essência, você está tentando descobrir como a sequência se comporta quando *n* aumenta muito, o que significa que você está tentando examinar algo lá longe, bem longe na sua lista de termos. Se a regra que define a sequência tiver um limite, é natural que ela também seja limitada.

de•fi•ni•ção

Uma sequência **convergente** tem elementos que se aproximam, mas nunca alcançam, de um valor limitante. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, a sequência $\{a_n\}$ converge. Aliás, quando escrevemos $\{a_n\}$ estamos nos referindo a qualquer sequência genérica, assim como $f(x)$ indica qualquer função genérica. Se a sequência não convergir, ela é chamada de **divergente**.

Exemplo 1: A sequência $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots$ é convergente ou divergente?

Solução: Primeiro você precisa de uma regra que defina essa sequência. O primeiro termo ($n = 1$) é $\frac{0}{1}$, e o segundo termo ($n = 2$) é $\frac{1}{4}$. Note que o numerador é um a menos que *n* e o denominador de cada termo é n^2. O mesmo padrão vale para os demais termos, então a sequência é $\left\{\frac{n-1}{n^2}\right\}$. Para saber se é convergente, examine $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2}$. Você se lembra de como encontrar limites no infinito? Você pode usar a regra de L'Hôpital ou comparar graus do numerador e denominador. De qualquer forma, você chega ao limite 0. Como existe um limite (ou seja, a sequência não cresce sem parar), ela é convergente.

Você Tem Problemas

Problema 1: A sequência $\left\{\frac{5n^3}{\ln n^2}\right\}$ converge ou diverge?

O que É uma Série?

Uma *série* matemática é muito parecida com uma sequência. Mas em vez de simplesmente listar os números em sequência, você os soma. As séries também são um pouco exigentes quanto ao seu início e fim. Para não confundir sequências e séries, eu uso a Copa do Mundo como dispositivo mnemônico. Como você marca os pontos de cada jogo? Você soma pontos para cada vitória individual. Assim, as séries são baseadas em somas, diferentemente das sequências.

de•fi•ni•ção

Série é a soma dos termos de uma sequência. É tipicamente escrita com notação sigma, que indica quais valores de *n* criam o seu primeiro e o seu último termo.

Observemos a série simples $\sum_{n=0}^{4}\left(n^2+3\right)$.

Não se assuste com a notação sigma (é esse o nome dessa letra grega na frente de tudo – só para explicar para aqueles de vocês que não participaram de fraternidades e irmandades na faculdade). Esses limites funcionam como limites de integração. Comece colocando o limite inferior (0) em *n* e então utilize números inteiros relativos consecutivos até chegar ao limite superior (4), que será o último termo. Lembre-se de que se trata de uma série, então você precisa juntar todos os resultados.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{4}\left(n^2+3\right) &= \left(0^2+3\right)+\left(1^2+3\right)+\left(2^2+3\right)+\left(3^2+3\right)+\left(4^2+3\right)\\ &= 3+4+7+12+19\\ &= 45\end{aligned}$$

Em geral, não nos preocupamos com séries como $\sum_{n=0}^{4}\left(n^2+3\right)$ porque são finitas (ou seja, não contêm um número infinito de termos). Séries finitas são aceitáveis, mas são como fazer *scuba diving* em uma piscina para crianças. Se você quiser ver peixes exóticos e polvos enormes que arrastam os homens para suas cavernas subaquáticas, precisamos examinar séries infinitas.

A sua primeira preocupação com as séries infinitas será determinar se elas convergem ou divergem, assim como as sequências. Quer dizer que se você adicionasse todos os termos na sequência infinita, você teria uma resposta de verdade? Parece bizarro juntar um número infinito de coisas e obter, digamos, $14\frac{2}{3}$, mas acontece. Como eu disse, estamos nadando com aquele peixe esquisito agora.

Ponto Crítico

No restante deste capítulo – e no próximo também – vamos examinar séries infinitas e tentar determinar se elas são ou não convergentes. Em alguns casos, vamos encontrar a real soma da série infinita, mas na maioria das vezes teremos de nos contentar em saber que a série converge, mesmo sem sabermos qual é a soma.

Antes de colocarmos nossos pés-de-pato e a nossa máscara de oxigênio, precisamos discutir uma última coisa: *teste de convergência do n-ésimo termo*. Em nossa metáfora bizarra (e estranhamente persistente) de *scuba diving*, esse teste é a nossa vara de pescar. Se uma série infinita não passar nesse teste, ela é automaticamente divergente, e nós não precisamos nos prender ao problema por nem mais um segundo. Então, o teste de divergência do *n*-ésimo termo deve ser a primeira coisa que você aplica em qualquer série infinita, em uma

tentativa de enfiar uma lança nas entranhas do problema. Uma vez que você prove que uma série é divergente, não há mais nada a fazer, a não ser procurar por predadores mais perigosos debaixo d'água.

Teste de divergência do n-ésimo termo: A série infinita $\sum a_n$ é divergente se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Você Tem Problemas

Problema 2: A série $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} n$ converge ou diverge?

Pense no que significa isso. Se você está juntando uma lista infinitamente grande de números, não tem como obter uma soma finita, a não ser que você esteja somando 0 (ou algo próximo a isso) infinitamente. Por exemplo, se $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, no fim você estará somando $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ para todo o sempre, e essa é uma soma que vai ficar infinitamente grande, meia unidade por vez, por toda a eternidade, o que fará a série divergir.

Alerta do Kelley

Não se pode usar o teste de divergência do *n*-ésimo termo para provar que uma série é convergente. Só dá para provar divergência. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (chamada "série harmônica"). Se você aplicar o teste de divergência do *n*-ésimo termo, verá que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Não se pode concluir que a série converge; aliás, a série diverge apesar de a sequência $\frac{1}{n}$ convergir. Nesse caso, o teste de divergência do *n*-ésimo termo não dirá nada a você.

Série Básica Infinita

Deixe-me voltar à minha metáfora maluca de séries e *scuba diving* por um instante. No Capítulo 23, você vai mergulhar nas profundezas do mar, será rodeado por seres aquáticos de todos os tipos, e talvez desvende um crime muito complexo ao observar os padrões da areia (este último evento só vai acontecer com você se você for parte da gangue do Scooby Doo, ou algum detetive amador). Antes que você possa ter esperança de sobreviver em um cenário aquático desses, você precisa passar um tempo em um viveiro de peixes, rodeado por peixinhos e peixões. As séries a seguir são os peixinhos do mundo das séries infinitas. Vamos encará-los antes que apareçam os devoradores de gente.

Série Geométrica

Em notação sigma ou em forma de soma, as séries geométricas são muito fáceis de lidar. Todos os termos terão um fator comum e, uma vez fatorado, o resultado será um número elevado a potências consecutivas. Parece difícil, mas na prática é muito simples. Todas as séries geométricas apresentam a forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, sendo que *a* é aquela constante que todos os termos têm em comum e *r* é a razão, o número elevado às potências consecutivas para gerar a série.

definição

Uma **série geométrica** tem a forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, onde *a* e *r* são constantes. Quando a série é expandida, cada termo contém *a*, e termos consecutivos têm potências consecutivas de *r*, o que chamamos de **razão**. Note que uma série geométrica tem o efeito de tornar *a* o primeiro termo quando *a* série é escrita como soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$$

Ponto Crítico

Você pode tirar constantes da notação sigma, assim como com as integrais. Assim como $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$ para qualquer constante *a*, $\sum a \cdot f(n) = a\sum f(n)$.

Uma série geométrica será convergente se $0 < |r| < 1$; será divergente se $|r| \geq 1$. Se a série convergir, você pode até encontrar a soma da série substituindo na fórmula $\frac{a}{1-r}$. Como determinar convergência é tão fácil quanto encontrar o termo *r*, essas séries não poderiam ser mais fáceis. São apenas meio traiçoeiras quando escritas em forma de soma e não em notação sigma. Nesse formato são apenas um pouco traiçoeiras.

Exemplo 2: Determine se a série geométrica $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \frac{81}{8} + \ldots$ é convergente ou não. Se for, forneça a soma da série.

Solução: O problema diz gentilmente a você que há uma série geométrica à espreita. O primeiro termo então é o termo *a*, e se você fatorá-lo, terá $2 + \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \frac{81}{16}\right)$. Claramente, a razão da série é $r = \frac{3}{2}$, pois os termos na expansão são potências consecutivas dessa fração — $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, etc.

Reescreva a série na forma geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Como $\left|\frac{3}{2}\right| \geq 1$, essa série será divergente e, assim, não terá soma finita.

Você Tem Problemas

Problema 3: Determine se a série $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$ é convergente ou não. Se for, encontre a soma.

Série *p*

Se uma série tiver a forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, onde *p* é uma constante, ela é chamada de série *p*. Às vezes as *séries p* tentarão esconder a sua identidade verdadeira com constantes extras, mas qualquer disfarce será transparente. Lembre-se, você pode fatorar constantes na notação sigma. Assim, até mesmo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3n^{2/3}}$ é uma série *p*. A remoção dessas constantes nos fornece $\frac{7}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$, que é uma série *p* com $p = \frac{2}{3}$.

de•fi•ni•ção

Uma **série *p*** tem a forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, onde *p* é uma constante. Ela converge se $p > 1$, mas diverge com qualquer outro valor de *p*. Note que o limite inferior da série não é mais $n = 0$, como com as séries geométricas. Agora, é $n = 1$, assim como para qualquer outra série que discutirmos daqui em diante.

É fácil determinar a convergência de uma série *p* – você só precisa examinar o *p* (eu sei que parece algo que o urologista diria, mas não se deixe pertubar por isso). Uma série *p* será convergente se $p > 1$, mas será divergente para todos os outros valores de *p*. Diferente da série geométrica, você não pode determinar a soma de uma série *p* convergente usando uma fórmula. Na verdade, você não terá de calcular a soma de uma série infinita, a não ser que ela seja geométrica ou telescópica (a próxima série simples que vamos estudar).

Você Tem Problemas

Problema 4: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5} n^{-3}$ é convergente ou divergente?

Série Telescópica

A principal característica da *série telescópica* é que um ou alguns termos da série serão cancelados, o que faz com que a soma dessas séries seja facilmente encontrada. Tudo o que você tem que fazer é escrever a expansão da série até que esteja claro quais termos desaparecem, anulados por outros termos da série.

Exemplo 3: Encontre a soma da *série telescópica* convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$.

Solução: Se você expandir essa série, obterá:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Reagrupe os pares de números opostos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)+\ldots$$

Cada termo maior que $\frac{1}{3}$ será cancelado por seu número oposto em algum lugar ao longo da vida da série. Assim, a soma da série é simplesmente a soma dos três termos restantes:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}=\tfrac{11}{6}$$

de•fi•ni•ção

Uma **série telescópica** contém um número infinito de termos e seus opostos, o que resulta em anulação de quase todos eles. Uma série telescópica, pela sua própria natureza, deve conter um sinal de subtração.

Você Tem Problemas

Problema 5: Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Uma sequência é uma lista de números baseada em uma regra definida. Uma sequência é convergente se houver limite no infinito de sua regra.
- Uma série é a soma de um número específico de termos de uma sequência definida por limites inferior e superior. Se o limite superior for o infinito, diz-se que a série também é infinita.
- As séries geométricas têm a forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ e convergem apenas se $0 < |r| < 1$; a soma de uma série geométrica convergente é $\frac{a}{1-r}$.
- As séries *p* têm a forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ e convergem apenas se $p > 1$.

Capítulo 23

Testes de Convergência de Séries Infinitas

Neste Capítulo

- Uma ligação com integração?
- Comparando séries: "Por que você não é como a sua irmã?"
- Desarmando séries por meio dos testes da razão e da raiz
- Investigando séries alternadas

Quando ensinei séries pela primeira vez, quando era professor do Ensino Médio, eu as odiava. Eu as repugnava. Não sei por quê, mas era diferente. Na verdade, quando a ideia de séries infinitas passava pela minha cabeça, eu fazia uma careta de escárnio involuntariamente. Podia estar ligado com as circunstâncias, creio eu. Eu era o professor substituto de cálculo porque a professora de verdade estava grávida.

Eu não me lembrava de uma derivada, integral ou limite sequer, mas tinha que ensinar séries infinitas para um bando de estudantes que provavelmente prefeririam ver-me estripado do que explicando conceitos que eu mesmo só entendia pela metade. É provável que você saiba como é odiar algum assunto de cálculo. A boa notícia é que você já tem uma bagagem muito boa de cálculo, então vai ser muito fácil entender os testes de convergência de séries.

Que Teste Você Usa?

Você já deve ter percebido que este capítulo é cheio de testes usados para determinar se uma série infinita converge ou não. Não vamos mais encontrar a soma de séries infinitas – as novas séries são muito complexas para isso – então vamos nos contentar em saber apenas se a soma misteriosa existe.

Assim como os problemas de integração, as séries infinitas pedem diversas técnicas. Algumas vezes, você saberá que teste usar apenas olhando para a série, mas na maioria das vezes, você terá de fazer alguns experimentos até encontrar um que funcione. Você já notou que é fácil escolher entre poucas opções? Bem, este capítulo traz mais seis testes de convergência, e pode ser difícil decidir qual deles usar. Mas, como tudo o mais em cálculo, a prática leva à perfeição. Você vai acabar desenvolvendo um instinto que o guie ao método correto com base na aparência do problema. Além disso, eu vou dar umas dicas para ajudar o seu instinto a tomar forma.

Teste da Integral

No Capítulo 18 você aprendeu a calcular integrais impróprias usando limites. Uma das principais causas de uma integral imprópria era um limite infinito. Você consegue ver alguma relação com limites infinitos? Observe os dois problemas a seguir:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+2n}\,dn \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2n}$$

de•fi•ni•ção

O **Teste da Integral** mostra que a série positiva $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se a integral imprópria $\int_1^{\infty} a_n\,dn$ tiver um valor finito. O oposto também é verdadeiro: se a integral definida for infinitamente grande, a série é divergente. Não faz muito sentido aplicar o Teste da Integral a uma função cujo gráfico seja crescente como $x \to \infty$, porque a área abaixo de uma curva não será finita.

Esses problemas são quase idênticos, como o Super-homem e o repórter Clark Kent. Na verdade, a série da direita será convergente se a integral à esquerda também for (tiver um valor numérico). Porém, se a integral da esquerda crescer sem limite, a soma da direita também crescerá. Essa correlação entre a convergência de uma série infinita e sua respectiva integral imprópria é chamada de *Teste da Integral.*

O Teste da Integral só pode ser aplicado a séries que contenham exclusivamente termos positivos (as chamadas séries positivas). Você vai lidar com séries contendo termos negativos e séries que alternam termos positivos e negativos com outros testes.

Exemplo 1: Use o Teste da Integral para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2n}$.

Alerta do Kelley

Se $\int_1^{\infty} a_n dn = B$, onde B é uma constante, você pode assumir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas não que a soma da série seja B.

Solução: Conforme eu já mencionei, essa série será convergente se $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+2n} dn$ for um número finito. Para avaliar a integral definida, você precisa substituir o limite infinito por um limite, como você fez no Capítulo 18:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+2n} dn = \lim_{a\to\infty}\left(\int_1^{a} \frac{1}{1+2n} dn\right)$$

Você pode integrar essa fração por meio da substituição u, usando $u = 1 + 2n$:

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int_3^{1+2a} \frac{1}{u} du\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\ln|u|\right)\Big|_3^{1+2a}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|1+2a| - \frac{1}{2}\ln 3\right)$$

À medida que a aumenta infinitamente, $\ln|1+2a|$ também aumenta, então a integral cresce sem limite e é divergente. Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2n}$ também é divergente.

Você Tem Problemas

Problema 1: Use o teste da integral para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou não.

Teste da Comparação

Embora você já esteja familiarizado com vários tipos diferentes de séries, existem muitas outras séries que não cabem nas categorias mais simples. Com que frequência você verá algo com uma forma geométrica perfeita, como $\sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$? Em geral, você verá séries *quase*, mas não completamente, geométricas. Mas que coisa!

Temos uma ótima técnica que comprovadamente funciona com séries geométricas e então aparece essa série que parece geométrica, pensa que é geométrica, mas não age como geométrica.

Ponto Crítico

Como você deve ter percebido na metáfora dos irmãos, o teste da comparação funciona melhor quando uma série se parece com um outro tipo de série conhecida, mas com alguma diferença. Note que a série original e a série à qual você compara devem ser positivas.

Se você tem irmãos, sabe muito bem como é ser comparado a eles. Frases como "Por que você não tira notas altas como a sua irmã?" e "Queria que você pudesse reconstruir uma transmissão com a clareza e significância com as quais o seu irmão faz" devem soar familiares para você. Não olhe agora – mas você se tornou pai ou mãe: "Por que você não pode ser uma série geométrica bem comportada como aquela outra?"

Felizmente, comparar séries umas às outras não é tão terrível como comparar pessoas. Na verdade, você pode usar os méritos e os pontos fortes das séries "boazinhas" para confirmar que a bem-intencionada – porém levemente desviada – série irmã também converge ou diverge.

Teste da Comparação (também conhecido como Teste da Comparação Direta): Dadas duas séries infinitas positivas $\sum a_n$ e $\sum b_n$, sendo que cada termo de $\sum a_n$ é menor ou igual ao termo correspondente em $\sum b_n$,

1. Se $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ também converge.
2. Se $\sum a_n$ diverge, $\sum b_n$ também diverge.

Pense assim: se uma série, chamada *B*, converge e cada termo em uma série *A* é menor do que o seu correspondente em *B* (por exemplo, o quinto termo em *A* é menor do que o quinto termo em *B*), então *A* deve ser convergente também. Números menores devem resultar em uma soma menor. A parte da convergência do teste da comparação funciona do mesmo jeito. Uma série maior (na relação termo a termo) do que uma série divergente também deve divergir.

Exemplo 2: Use o teste da comparação para mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2}{3^n}$ é divergente.

Solução: Esqueça o "+ 2" por enquanto. Se não fosse por esse bendito 2, você teria a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$, que é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{4}{3}$. Note que a série ligeiramente mudada contendo o termo "+ 2" será maior do que a sua série geométrica correspondente. Os denominadores de ambas as séries são iguais, mas o numerador na série alterada será maior do que a sua correspondente em cada valor de *n* que você usar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2}{3^n} = 3 + \frac{6}{3} + \frac{18}{9} + \frac{66}{27} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{64}{27} + \cdots$$

Então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2}{3^n}$ é maior que a série geométrica divergente $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ (e diverge porque $\left|\frac{4}{3}\right| \geq 1$). Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2}{3^n}$ também deve divergir de acordo com o teste da comparação.

Você Tem Problemas

Problema 2: Use o Teste da Comparação para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 3}$.

Teste da Comparação do Limite

Frações com ***n*** elevado a potências exponenciais tanto no numerador como no denominador são fortes candidatas ao Teste da Comparação do Limite. Assim como no teste da comparação, você terá de desenhar uma série de comparação. Digamos que você tenha a série positiva $\sum a_n$. A série de comparação que você criará vai ignorar todos os termos do numerador e denominador de $\sum a_n$, exceto o termo ***n*** de maior grau. Vamos chamar a série que você criou de $\sum b_n$. Agora, divida $\sum a_n$ por $\sum b_n$ e avalie o limite à medida que ***n*** se aproxima do infinito. Se houver limite (um número finito positivo), ambas as séries se comportam do mesmo jeito – ou seja, as duas séries convergem ou divergem. Agora que você tem uma ideia geral, vamos falar em termos matemáticos.

Alerta do Kelley

O Teste da Comparação do Limite só funciona para séries positivas, assim como o Teste da Integral e o Teste da Comparação. Note também que o limite no Teste da Comparação do Limite, se existir, apenas diz se ambas as séries convergem ou divergem. O limite não é igual à soma das séries, assim como o valor da integral definida no Teste da Integral não era igual à soma da série correspondente.

Teste da Comparação do Limite: Dadas as séries positivas infinitas $\sum a_n$ e $\sum b_n$, se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = N$$

onde *N* é um número positivo e finito, então ambas, $\sum a_n$ e $\sum b_n$, ou convergem ou divergem.

Exemplo 3: Use o Teste da Comparação do Limite para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2+3n-2}$.

Solução: Essa série contém ***n*** elevado a várias potências nas duas partes da fração, então é uma forte candidata ao Teste da Comparação do Limite. Para gerar sua série de comparação, use apenas as potências maiores de ***n*** no numerador e no denominador, e ignore o resto (até mesmo os coeficientes desses termos). Você vai chegar a uma série de comparação $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Agora, avalie o limite no infinito da série original dividida pela nova série:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4n+1}{n^2+3n-2}}{\dfrac{1}{n}}$$

Dividir uma fração por outra é o equivalente a multiplicar a fração de cima pelo inverso da fração de baixo.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n^2+3n-2} \cdot \frac{n}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n}{n^2+3n-2} = 4$$

Como o limite é um número positivo finito, as duas séries convergem ou divergem. Claramente, a série de comparação $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série ***p*** divergente. Já que a série de comparação diverge, ambas as séries divergem.

Você Tem Problemas

Problema 3: Determine a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$ usando o Teste da Comparação do Limite.

Teste da Razão

O Teste da Razão é muito útil para séries cujos termos aumentam rapidamente. Se a série em questão tiver expoentes ou (melhor ainda) *n* expoentes ou fatoriais, o Teste da Razão é tudo o que você precisa quando se trata de convergência. Tanto este teste quanto o Teste da Raiz (a seguir – não mude de canal!) funcionam como um guru – pergunte a ele se a série converge e veja o que acontece. Será que você vai compreender como se faz isso? O guru me diz que sim...

Ponto Crítico

Séries que contêm fatoriais são candidatas fortíssimas ao Teste da Razão. Você se lembra do que é um fatorial? É um ponto de exclamação próximo a um número, assim: 5!. Matematicamente, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Um fatorial é basicamente o produto do número e cada número inteiro relativo que vem antes dele, menor ou igual a 1.

Teste da Razão: Se $\sum a_n$ é uma série infinita de termos positivos e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, temos:

1. $\sum a_n$ converge se $L < 1$.
2. $\sum a_n$ diverge se $L > 1$ ou $L = \infty$, e
3. Se $L = 1$, o Teste da Razão não conclui nada. A série pode tanto convergir quanto divergir, ou pode ficar esperando pelo momento perfeito de dar um soco no seu nariz e voltar correndo para as sombras. Você terá de usar outra técnica para testar a convergência; esta aqui será um fracasso.

Ponto Crítico

O Teste da Razão contém o termo a_{n+1}, que corresponde à fórmula da série com $(n + 1)$ no lugar de n. Em essência, você divide um termo da série pelo seu termo consecutivo e examina o resultado.

Exemplo 4: Use o Teste da Razão para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

Solução: À medida que *n* se aproxima do infinito, o numerador e o denominador vão aumentar rapidamente, então use o Teste da Razão. Coloque $(n + 1)$ no lugar de *n* e multiplique o resultado pela inversa do termo geral (é o mesmo que dividir pelo termo geral):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} \right)$$

Veja com cuidado. Vou fazer a mágica da reescrita aqui. Meu objetivo é quebrar o fatorial no numerador e "reformar" o termo 2^{n+1}:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n!)2^n}{(n!)2^n\cdot 2^1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\cancel{n!})\cancel{2^n}}{(\cancel{n!})2^n\cdot 2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}$$

Veja como eu fiz isso. Primeiro, $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n$ pela mesma razão que $5! = (5) \cdot 4! = (5) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Depois, $2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1$ porque você sabe que $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$.

Essa fração vai aumentar sem limite à medida que n se aproximar do infinito; de acordo com o Teste da Razão, isso indica divergência da série.

Você Tem Problemas

Problema 4: Use o Teste da Razão para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{n!}$.

Teste da Raiz

O Teste da Raiz é o irmão do Teste da Razão porque também examina um limite no infinito e aplica *os mesmos três resultados condicionais* com base na comparação do limite a 1. Porém, em vez de examinar o limite de uma razão, ele examina o limite da n-ésima raiz. Assim, este teste é mais bem utilizado quando todas as partes da série são elevadas à n-ésima potência. Aleluia! Finalmente, um teste de convergência de série apropriada! Lembre-se, procure por tudo que for elevado à n-ésima potência e você estará numa boa.

Teste da Raiz: Se $\sum a_n$ é uma série infinita de termos positivos e $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$, então:

1. $\sum a_n$ converge se $L < 1$,
2. $\sum a_n$ diverge se $L > 1$ ou se $L = \infty$, e
3. Se $L = 1$, o Teste da Raiz não chega a conclusão nenhuma (assim como o Teste da Razão).

Exemplo 5: Use o Teste da Raiz para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n-1}{5n^2+16n-12}\right)^n$.

Solução: Tudo isso aí é elevado à n-ésima potência, o que indica que o Teste da Raiz é o caminho:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2n-1}{5n^2+16n-12}\right)^n}$$

Alerta do Kelley

Existe uma regra em álgebra que diz que a *n*-ésima raiz de qualquer número elevado à *n*-ésima potência deve ser contida por barras de valor absoluto depois que você simplifica, mas só se *n* for um número par. Em outras palavras, $\sqrt{x^2} = |x|$ e $\sqrt[6]{(x-1)^6} = |x-1|$. Ainda que o teste da raiz se pareça muito com esta regra, não se preocupe com valores absolutos – a série está cheia de termos positivos apenas.

Note que a *n*-ésima raiz e a *n*-ésima potência se cancelam, então só resta um limite no infinito muito simples para você:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{5n^2+16n-12} = \frac{1}{5}$$

Como $\frac{1}{5} < 1$, a série converge.

Você Tem Problemas

Problema 5: Determine a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n^n}$.

Séries com Termos Negativos

Todos os testes de convergência funcionam apenas para séries positivas. Bem, deixe-me dizer uma coisa: é difícil ser positivo o tempo todo. Ocasionalmente, você precisa ser negativo! Naquelas manhãs em que não consigo encontrar as chaves do carro e bato o dedinho no pé da mesa ao procurar por elas, correndo pela casa feito um lunático, já que estou atrasado, eu entendo a necessidade de lidar com uma série contendo termos negativos. Antes de nos despedirmos deste capítulo, você vai aprender dois mecanismos para lidar com tais séries.

Teste da Série Alternada

A maioria das séries que você vai encontrar contendo termos negativos é *série alternada*, ou seja, seus termos consecutivos têm sinais diferentes. Isso quer dizer que os termos de mesmo sinal se alternam. Você pode testar a convergência de uma série alternada com um teste de duas etapas relativamente simples.

Teste da Série Alternada: Se $\sum a_n$ é uma série alternada e as duas condições a seguir são atendidas, $\sum a_n$ converge:

1. Todos os termos da série são menores ou iguais ao seu precedente;
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

de•fi•ni•ção

Séries alternadas são séries cujos termos consecutivos alternam entre positivos e negativos. Por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

é uma séria alternada. Geralmente, essas séries contêm $(-1)^n$ ou $(-1)^{n+1}$. É essa parte que faz com que os sinais da série se alternem, pois –1 elevado a uma potência ímpar é negativo, mas é positivo quando elevado a uma potência par.

Então, se você tem uma série alternada e quer determinar sua convergência, é isso o que tem de fazer. Primeiro, escreva alguns termos da série. Está claro que cada termo é menor ou igual ao seu precedente (ignore os sinais positivos e negativos)? Se sim, ótimo! Vá para a próxima etapa (se não, você terá de tentar a convergência absoluta, o assunto da próxima seção). Em segundo lugar, você precisa se assegurar de que a série tem um limite no infinito igual a 0 (mais uma vez, ignorando os sinais).

Ponto Crítico

Note que a segunda parte do Teste da Série Alternada $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$ é apenas o teste de divergência do *n*-ésimo termo do Capítulo 22.

Exemplo 6: Determine a convergência de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1}$.

Solução: Comece escrevendo alguns termos da série:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{24} - \frac{1}{35} + \cdots$$

Cara, o denominador está ficando maior muito rápido, mas isso é bom, pois força cada termo da série a diminuir cada vez mais, o que corresponde à primeira condição do teste da série alternada (não se esqueça de ignorar os sinais positivos e negativos quando for checar a diminuição dos termos). Resta um obstáculo. Você precisa avaliar o limite (à medida que ***n*** se aproxima do infinito) da fórmula da série sem a parte $(-1)^{n+1}$. Como na primeira parte do Teste da Série Alternada, continue ignorando os negativos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0$$

Contanto que o limite seja igual a 0 (e ele é igual a 0), a segunda condição do Teste da Série Alternada é satisfeita. Agora que as duas condições foram satisfeitas, você pode concluir que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}$ converge.

Você Tem Problemas

Problema 6: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3n+1}$ converge ou diverge?

Convergência Absoluta

Às vezes, o Teste da Série Alternada falha. Nesses casos, você será forçado a examinar a *convergência absoluta* da série. Basicamente, você vai ignorar os sinais da série e usar um dos testes que já aprendeu neste capítulo. Ignorar os sinais (ou seja, assumir que todos os termos são positivos) é mandatório, pois esses testes de convergência funcionam apenas para séries positivas.

de•fi•ni•ção

A série $\sum a_n$ exibe **convergência absoluta** se $\sum |a_n|$ convergir. A convergência absoluta é mais difícil de encontrar do que a convergência regular, então, se uma série converge absolutamente, é o mesmo que dizer que ela converge "com honra".

Digamos que você comece com uma série $\sum a_n$, que contém alguns termos negativos. Note que não precisa ser uma série alternada; só precisa conter pelo menos um termo negativo. Se a série $\sum |a_n|$ – que é a série original, mas com todos os sinais negativos alterados para positivos – convergir, então $\sum a_n$ converge *absolutamente*, o que significa que a velha e regular $\sum a_n$ é automaticamente uma série convergente, mesmo que você não tenha chegado a essa conclusão por meio do Teste da Série Alternada. Porém, se $\sum |a_n|$ não convergir com um dos testes originais, você não tem ideia se $\sum a_n$ converge, e então todo mundo volta para casa desanimado, esperando que esteja passando algo interessante na TV.

Exemplo 7: Determine a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{n!}$.

Solução: Essa é definitivamente uma série alternada, e os termos definitivamente diminuem à medida que ***n*** aumenta, mas $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \frac{\infty}{\infty}$.

Como a série alternada oscila (não dá para saber se o limite é 0 ou não), cheque se a série converge absolutamente. Em outras palavras, veja a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

As duas partes da fração aumentam rapidamente; então aplique o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)\cdot\cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}\cdot n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^3+n^2}=0$$

Ponto Crítico

Se uma série for absolutamente convergente a uma soma finita (que você pode testar ignorando os sinais negativos), quando você jogar de volta os termos negativos eles não afetarão a convergência. Quando muito, alguns números negativos apenas tornariam a soma menor.

Como $0 < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ converge. Assim, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{n!}$ é uma série absolutamente convergente.

Você Tem Problemas

Problema 7: Determine a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4\cdot 2^n}{3^n}$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- Você pode determinar a convergência de uma série usando o Teste da Integral se o termo geral for facilmente integrado.
- Se uma série se parecer muito com uma série bem mais simples, você pode aplicar o Teste da Comparação ou o Teste da Comparação do Limite para determinar se a série converge ou não.
- Os Testes da Razão e da Raiz pedem que você calcule um limite no infinito. A forma como esse limite é comparado ao número 1 nos diz se a série é convergente ou não.
- Se uma série contiver termos negativos e positivos alternados, você tem de aplicar o Teste das Séries Alternadas para descobrir se ela é convergente; se não funcionar, teste se a série é absolutamente convergente.

Capítulo 24

Séries Especiais

Neste Capítulo

- Séries podem ser funções?
- Séries de Potência, Taylor e Maclaurin
- Encontrando o raio e os intervalos de convergência
- Construindo polinômios de aproximação

Agora que o Capítulo 23 já passou, você sabe um pouco sobre as séries. Basicamente, você é um super-herói capaz de determinar a convergência de séries rapidamente, mais rápido que o limite da velocidade, mais poderoso que a Regra da Potência. Neste capítulo, você vai aprender outras habilidades de super-herói, e então estará pronto para lutar contra os vilões e gênios do mal que constroem máquinas do tempo para levar adiante seus planos de dominar o mundo.

Este capítulo desenvolverá seu conhecimento sobre as séries, com uma pequena diferença. Você vai começar a usar séries que contêm variáveis para que o resultado não seja uma série de números, mas sim uma função. Algumas séries podem ser usadas para aproximar valores de funções, assim como a aproximação linear, que vimos no Capítulo 21. Porém, essas séries funcionam muito melhor para aproximar funções e, na verdade, podem até chegar ao exato valor delas, mesmo que a função seja complicada.

O *grand finale* será um breve estudo sobre polinômios de aproximação, construídos por meio das chamadas séries de Taylor e Maclaurin. Elas também são usadas para valores aproximados de funções, são baseadas em uma definição e são muito melhores que aproximações lineares para estimar valores de funções. Na prática, ainda há algumas coisas para você memorizar, mas nada de matemática nova ou complexa. A questão é: Esta é a primeira hora do último dia da sua jornada matemática, ou simplesmente a última hora do primeiro dia? Ainda haverá muito a aprender quando esta jornada acabar.

Séries de Potência

Fizemos muitas aproximações neste livro. Muitas de nossas técnicas começaram complicadas e, depois, refinamos para uma técnica mais precisa. Por exemplo, antes de encontrarmos a área exata sob as inclinações usando o Teorema Fundamental do Cálculo, pensamos muito ao aproximar a área abaixo de curvas com formas cujas áreas eram conhecidas – retângulos, trapézios e (para quebrar a monotonia) macacos bugios.

Durante o estudo dessas técnicas de aproximação, ficou claro que quanto mais cálculos estiverem envolvidos no processo, mais precisa será a predição. Por exemplo, a presença de mais retângulos sob a inclinação significa uma soma de Riemann mais precisa. Passos Δx menores em uma equação diferencial durante o Método de Euler significam uma solução mais precisa para a equação diferencial.

de•fi•ni•ção

Uma **série de potência** centrada em $x = c$ tem a fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ e é usada para valores de funções próximas a $x = c$.

Na verdade, a melhor forma de conseguir uma boa aproximação é usando um número infinito de passos. Graças a séries infinitas, você agora possui uma ferramenta com grandes possibilidades; e suas aproximações podem chegar muito perto. *Séries de potência* são séries infinitas (contendo *x*) centradas em algum valor de *c* que dão aproximações para valores de *x* próximos a *c* – às vezes, até produzindo o valor exato da função, mesmo que esta não seja simples. Elas têm a formula $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$, onde a_n é alguma fórmula que contenha *n* representando o coeficiente de cada termo.

Raio de Convergência

Quer você goste, quer não, seu único foco será determinar onde a série de potência vai convergir. A boa notícia é que elas sempre convergem para *algum lugar*, mas a má notícia é que há três "alguns lugares" para os quais a série pode convergir:

- Somente no valor de *c* onde a série está centrada
- Em números reais com raio *r* (chamado *raio de convergência*) do centro da série
- Em todos os lugares

Ponto Crítico

Está definido que a série de potência pode, em teoria, aproximar os valores da função. Entretanto, isso é bem avançado. Vamos ser francos sobre o que você realmente vai fazer. Você não terá de desenhar uma série de potência. Você provavelmente nem vai saber de que funções, se houver alguma, a série de potência está tentando se aproximar. Você só vai se preocupar em determinar o local onde a série de potência converge. Só isso. Como no capítulo anterior, você só vai se preocupar com a convergência.

de•fi•ni•ção

Se uma série de potência for centrada em torno de $x = 5$ e tiver raio de convergência 3, então a série de potência converge no intervalo $(5 - 3, 5 + 3) = (2,8)$. Você não sabe se a série converge nas extremidades do intervalo– discutiremos isso na próxima seção. Você pode descrever o mesmo intervalo matematicamente desta forma: $|x - 5| < 3$. Em outras palavras, uma série de potência centrada em $x = c$ com raio de convergência r converge para todos os x que satisfizerem $|x - c| < r$. Em termos mais simples, se o **raio de convergência** for r, então a série de potência vai convergir para qualquer x entre $c - r$ e $c + r$.

No Exemplo 1, você vai trabalhar em uma série de potência para encontrar o raio de convergência. Aqui estão algumas coisas importantes que quero que você observe enquanto o problema progride:

- Usar o Teste do Raio para assegurar convergência absoluta
- Encontrar o raio de convergência forçando o resultado na fórmula $|x - c| < r$.

Ponto Crítico

O raio de convergência para uma série de potência que converge somente no seu centro é $r = 0$. Se a série de potência convergir para todos os números reais, o raio é infinito. No Exemplo 1, você vai encontrar o outro único resultado possível: um número finito e real.

Exemplo 1: Encontre o raio de convergência para a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x-1)^n}{4^n}$.

Solução: Lembre-se que uma série de potência tem a fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, então, essa série de potência define $a_n = \frac{n^2}{4^n}$ e $c = 1$. Assim, ela pode aproximar valores para alguma função, pelo menos para o valor de $x = 1$, e talvez para alguns valores próximos. Quão próximo esses valores de x devem estar para fazer essa série convergir? Essa é a pergunta do dia. Já que séries de potência (por definição) contêm elementos elevados à potência n (que crescem conforme n chega ao infinito), usa-se o Teste do Raio para determinar quando elas convergem. Além disso, você sempre examinará a convergência absoluta, então chegue ao valor absoluto da série. Mesmo se fosse uma série alternada, ou só uma série com termos negativos, você seguiria o mesmo processo. Comece com o Teste do Raio:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 (x-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^2 (x-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(n^2 + 2n + 1\right)(x-1)}{4n^2} \right|$$

Perceba que $\frac{n^2+2n+1}{4n^2}$ se aproxima de $\frac{1}{4}$ enquanto n se aproxima do infinito. O termo $(x - 1)$ não é afetado pelo crescimento infinito de n, já que não possui nenhum n. Assim, o limite é igual a $\left|\frac{1}{4}(x-1)\right|$. Então, e agora? Bem, o Teste do Raio diz que o limite deve ser menor que 1 para que a série possa convergir. Para garantir a convergência, você deve saber que

$$\left|\frac{1}{4}(x-1)\right| < 1$$

Neste ponto, você quase tem a fórmula $|x - c| < r$. Para alcançar essa fórmula, multiplique ambos os lados por 4; você terá $|x - 1| < 4$. Isso significa que o raio de convergência é 4. Assim, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x-1)^n}{4^n}$ vai convergir no intervalo $(c - r, c + r) = (1 - 4, 1 + 4) = (-3, 5)$. Isso significa que se substituir qualquer valor nesse intervalo no lugar de x na série, o resultado será uma série convergente.

Você Tem Problemas

Problema 1: Encontre o raio de convergência para a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$.

Intervalo de Convergência

No Exemplo 1, você determinou que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x-1)^n}{4^n}$ converge no intervalo (–3, 5). Entretanto, a série também pode convergir nas extremidades do intervalo, $x = -3$ e $x = 5$. Testando as extremidades, você pode determinar o *intervalo de convergência*.

definição

O **intervalo de convergência** para uma série de potência centrada em c é encontrado após você determinar o raio de convergência, *r*. Você precisa inserir cada extremidade ($c - r$ e $c + r$) na série para *x* para ver se a série resultante converge ou diverge. A série pode convergir em ambos os casos, em nenhum deles, ou somente em um.

Exemplo 2: Em que intervalo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x-1)^n}{4^n}$ (do Exemplo 1) converge?

Solução: Você já sabe que o raio de convergência é 4 e que a série converge no intervalo (–3, 5). O que falta é determinar a convergência nas extremidades.

Primeiro Passo: Teste a extremidade $x = -3$.

Insira $x = -3$ nas séries:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(-3-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(-4)^n}{4^n}$$

Reescreva a série para chegar a $\sum_{n=0}^{\infty} n^2\left(\frac{-4}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(-1)^n$. A série diverge de acordo com o teste do *n*-ésimo termo. Conclusão: a série diverge quando $x = -3$.

Segundo Passo: Teste a extremidade $x = 5$.

Ao inserir $x = 5$ na série e simplificar, você tem $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(1)^n$, que também diverge de acordo com o teste do *n*-ésimo termo. Já que a série divergiu em ambas as extremidades, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x-1)^n}{4^n}$ tem um intervalo de convergência de (-3, 5); nenhuma extremidade está incluída no intervalo.

Você Tem Problemas

Problema 2: Encontre o intervalo de convergência para a série de potência $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-8)^{n+1}}{n}$.

Série de Maclaurin

Adoro comida *fast-food*. É uma das minhas verdadeiras fraquezas. Há algo realmente maravilhoso em pedir um *cheeseburguer* e recebê-lo em aproximadamente 45 segundos. Verdade seja dita, é um pouco desanimador quando o *cheeseburguer* vem com tanto óleo que, quando você chega ao seu carro, o pacote com sua comida já está quase transparente. Porém, a amante cruel que é a comida conveniente toca sua sirene, e sigo voltando para ela.

Quando você vai a um restaurante *fast-food*, não espera levar para casa comida caseira. (Ninguém em casa embrulha sua comida em um papel, coloca batatas fritas em caixinhas de papelão ou guarda a comida morna embaixo de luzes de aquecimento de alta potência). Não há nada igual a uma comida caseira. Isso é bom e ruim. Sempre achei que as batatas fritas e os refrigerantes de *fast-food* são muito melhores do que seus primos caseiros, enquanto os hambúrgueres são muito melhores quando tirados direto da sua churrasqueira.

Mesmo que o gosto não seja igual, entretanto, a comida *fast-food* é relativamente próxima à comida caseira. Até melhor, porque a comida *fast-food* praticamente não requer preparo, e você pode experimentar muitos tipos diferentes, de restaurantes diversos, sem ter de aprender habilidades novas. Você faz o pedido da mesma forma no Burguer King, no McDonald's e no Bob's – contanto que tenha dinheiro, você está a segundos de distância de um prato saboroso e gorduroso.

Ponto Crítico

A seguir, você vai aprender a usar a série de Taylor, que funciona quase exatamente igual à de Maclaurin, à exceção de poder centralizá-la em qualquer valor de x. Aí está sua encruzilhada. A série de Maclaurin é mais simples que a de Taylor, mas a de Maclaurin é, por definição, centrada em $x = 0$. Se você estiver aproximando um valor de função para um x distante de 0, terá de usar a série de Taylor, que é um pouco mais complicada.

Você deve estar se perguntado aonde quero chegar com essa metáfora. A série de Maclaurin são os aproximadores *fast-food* do mundo das funções. (Na minha metáfora, as funções regulares são caseiras e as de Maclaurin são iguais ao McDonald's). Você já aprendeu um método para aproximar funções (lembra-se da aproximação linear?), mas a série de Maclaurin oferece aproximações de funções muito mais precisas. Tudo o que você precisa fazer é aprender uma fórmula geral, e subitamente você pode até aproximar valores de funções complicadas.

Matematicamente, dizemos que a *série de Maclaurin* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ aproxima valores de $f(x)$ com muita precisão, contanto que esses valores de x sejam próximos a 0, onde a série de potência é centrada. Acredite ou não, você não precisa se preocupar com a convergência da série! Na verdade, quando você trabalha com a *série de Maclaurin*, você gera *polinômios de Maclaurin*, que são partes finitas das séries.

Antes de começar a gerar esses polinômios, esteja certo de que entendeu a fórmula; ela contém algo de estranho – um expoente entre parênteses. Caso você não saiba o que $f^{(n)}(0)$ significa, é a n-ésima derivada de $f(x)$ avaliada em 0. Por exemplo, $f^{(5)}(0)$ é a quinta derivada de $f(x)$ com um 0 no lugar do x. Essa é uma observação importante. É óbvio que escrever a 12ª derivada de $f(x)$ como $f^{(12)}(x)$ é melhor que $f''''''''''''(x)$. (Embora você pudesse dizer que a última notação é um "luxo").

de•fi•ni•ção

A **série de Maclaurin** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ gera boas aproximações de $f(x)$, contanto que x seja próximo de 0. Você não vai usar uma série infinita para fazer a aproximação; entretanto, vai usar um número definido de termos da série. Quanto mais termos usar, melhor será a aproximação.

Exemplo 3: Use o polinômio de Maclaurin de quinto grau para a função $f(x) = \text{sen } x$ para aproximar sen (0,1).

Solução: Escreva os termos da série de Maclaurin de $n = 0$ para $n = 5$.

$$\frac{f^{(0)}(0)x^0}{0!} + \frac{f'(0)x^1}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!}$$

Então, você precisa pegar cinco derivadas da função $f(x) = \text{sen } x$ e inserir 0 em cada uma delas:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \text{sen } x & f(0) &= \text{sen } 0 = 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= \cos 0 = 1 \\
f''(x) &= -\text{sen } x & f''(0) &= -\text{sen } 0 = 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -\cos 0 = -1 \\
f^{(4)}(x) &= \text{sen } x & f^{(4)}(0) &= \text{sen } 0 = 0 \\
f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

Alerta do Kelley

O primeiro termo na série do Exemplo 3 é bizarro: $\frac{f^{(0)}(0)x^0}{0!}$. Não existe a "zerézima" derivada – isso simplesmente significa função original (você a deriva 0 vezes). Você pode até imaginar qual seja o valor de 0!. Já que a definição comum de fatoriais não trabalha com 0, você deve definir seu valor separadamente: 0! = 1.

Agora, insira esses valores nas séries. Caso você esteja confuso sobre como isso funciona, aqui vai a explicação sobre como criar o termo n = 3, $\frac{f'''(0)x^3}{3!}$. Já que $f'''(0) = -1$ e $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, insira esses valores no termo para chegar a $\frac{(-1)x^3}{6}$. Repare que as derivadas de funções com potências iguais vão desaparecer neste exemplo porque você acaba multiplicando por 0 nesses termos:

$$\frac{f^{(0)}(0)x^0}{0!} + \frac{f'(0)x^1}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!}$$
$$= 0 + \frac{1 \cdot x}{1} + 0 + \frac{(-1)x^3}{6} + 0 + \frac{1 \cdot x^5}{120}$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Aí está – o polinômio de Maclaurin de quinto grau para $f(x) = \text{sen}x$. Se você inserir $x = 0{,}1$ no polinômio, vai chegar a uma aproximação de sen 0,1:

$$\text{sen}0{,}1 \approx (0{,}1) - \frac{(0{,}1)^3}{6} + \frac{(0{,}1)^5}{120}$$
$$\approx 0{,}099833416667$$

O valor real de sen 0,1 é 0,0998334166<u>4</u>7. Puxa! Isso é que é estar próximo! Não posso aproximar sen 0,1, nem que seja para salvar a minha vida. Mal sei como começar a adivinhar qual seria seu valor. Porém, você consegue quase o valor exato ao inserir um polinômio com três termos. Se você tivesse usado $n = 7$, seria uma aproximação bem melhor.

Veja na Figura 24.1 como os gráficos dos polinômios de Maclaurin, de perto, parecem o gráfico da função seno conforme o número de termos no polinômio de Maclaurin cresce. O polinômio de Maclaurin aos poucos se molda para combinar com o polinômio enquanto você aumenta o número de termos polinomiais. Isso me lembra aquele filme, *Mulher Solteira Procura*, no qual a mulher louca aos poucos se ajusta a todos os aspectos da vida de sua colega de quarto com o objetivo final de matá-la e viver a sua vida. Não estou dizendo que os polinômios de Maclaurin sejam loucos; mas também, não estou dizendo que não são. Tome cuidado.

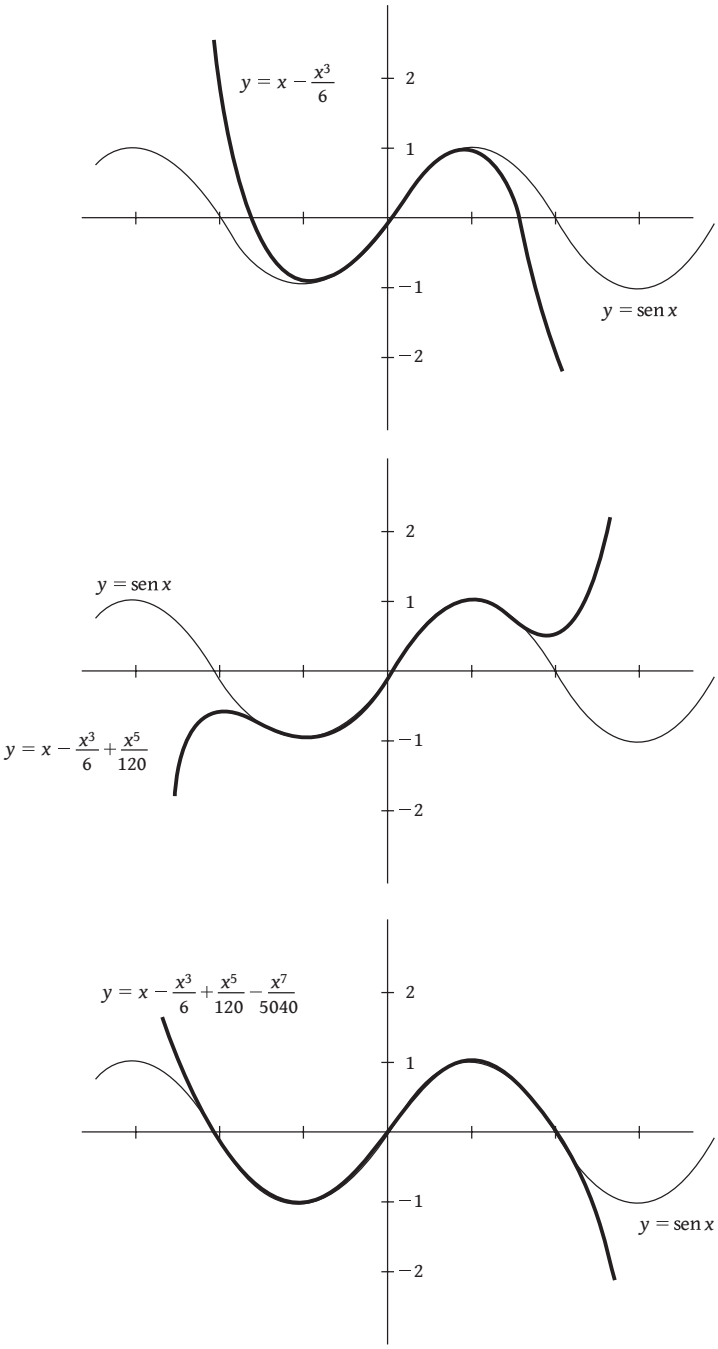


Figura 24.1

Quanto mais termos no polinômio de Maclaurin, mais o gráfico parece o gráfico do seno.

Você Tem Problemas

Problema 3: Use um polinômio de Maclaurin de quarto grau para $f(x) = e^x$ para aproximar $e^{0,25}$.

Série de Taylor

de•fi•ni•ção

A **série de Taylor** tem a fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$, e precisamente estima valores de $f(x)$ próximos a $x = c$, o centro da aproximação.

Após saber como funciona a série de Maclaurin, a série de Taylor se torna muito fácil. A série de Maclaurin se parece muito com a de Taylor porque a de Maclaurin, na verdade, é a *série de Taylor* centrada em $x = 0$. Assim, uma série de Taylor é somente uma forma mais genérica da série de Maclaurin; ela pode estar centrada em qualquer valor de x, não somente em $x = 0$.

O objetivo da série de Taylor é o mesmo da sua predecessora – aproximar valores de funções. Assim como antes, você só garante uma boa aproximação se ficar próximo ao centro da série.

A série de Taylor é quase idêntica à de Maclaurin:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

Perceba as diferenças nas fórmulas:

- As derivadas nas séries de Taylor são avaliadas em $x = c$, o centro da aproximação, não automaticamente em $x = 0$
- Em vez de elevar x à potência n, eleve a quantidade $(x - c)$ à potência n

À exceção disso, as fórmulas são idênticas. Assim, um polinômio de Taylor não é mais nem menos preciso que um polinômio de Maclaurin – eles são igualmente precisos, mas têm objetivos diferentes. Se você estiver tentando, por exemplo, aproximar o valor de uma função em $x = 10,1$, você precisa de um polinômio de Maclaurin maior, já que 10,1 está distante do centro obrigatório de Maclaurin, $x = 0$. Porém, um polinômio de Taylor muito menor, centrado em $x = 10$, vai produzir uma boa estimativa.

Exemplo 4: Aproxime ln (2,1) usando um polinômio de Taylor de terceiro grau para $f(x) = \ln x$ centrado em $x = 2$.

Solução: Neste problema, $f(x) = \ln x$ e $c = 2$. Você vai precisar de derivadas até, e incluindo, a terceira derivada, todas avaliadas em 2:

$$f(x) = \ln x \quad f(2) = \ln 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(2) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(2) = -\frac{1}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Insira tudo isso no polinômio de Taylor de grau 3:

$$f(2) + \frac{f'(2)(x-2)}{1!} + \frac{f''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{f'''(2)(x-2)^3}{3!}$$
$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\cdot(x-2) + \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-2)^3}{6}$$
$$= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24}$$

Insira $x = 2{,}1$ no polinômio:

$$\ln 2 + \frac{(2{,}1)-2}{2} - \frac{(2{,}1-2)^2}{8} + \frac{(2{,}1-2)^3}{24}$$
$$= \ln 2 + \frac{0{,}1}{2} - \frac{(0{,}1)^2}{8} + \frac{(0{,}1)^3}{24} \approx 0{,}7419885$$

O valor real de ln 2,1 é 0,74193734, então a aproximação é bem precisa.

Você Tem Problemas

Problema 4: Aproxime $\sqrt{4{,}2}$ usando um polinômio de Taylor de segundo grau para $f(x) = \sqrt{x}$ centrado em $x = 4$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

- As séries de Potência, Maclaurin e Taylor são usadas para aproximar valores de função próximos ao valor de x nos quais estão centrados.
- Você encontra o raio de convergência para séries de potência usando o Teste do Raio para convergência absoluta.
- Até mesmo os polinômios de Maclaurin bem compactos podem dar estimativas precisas de valores de funções próximos a $x = 0$.
- As séries de Taylor dão estimativas tão precisas quanto as de Maclaurin, mas você pode centralizar a série de Taylor em qualquer valor de x.

Capítulo 25

Teste Final

Neste Capítulo

- Medindo o seu entendimento dos tópicos mais importantes
- Praticando habilidades
- Determinando o que praticar mais

Nada melhor para ajudá-lo a entender matemática do que a boa e velha prática, e esse é o propósito deste capítulo. Você pode utilizá-lo da forma que desejar, mas eu sugiro as seguintes estratégias:

1. Ao terminar cada capítulo, corra para cá e pratique os problemas relacionados ao tópico.
2. Se você estiver usando este livro para complementar uma aula que você já teve, faça os testes antes de começar a lê-lo. Depois, volte e leia os capítulos que contêm os problemas que você não resolveu. Depois de rever os tópicos, tente resolvê-los novamente.
3. Deixe este capítulo para o final e use-o para checar o que você se lembra de cada assunto depois de tê-lo estudado há algum tempo.

Como esses problemas são voltados exclusivamente à prática, e não ao ensinamento de novos conceitos, apenas as respostas são dadas no final do capítulo, geralmente sem explicação ou justificativa (diferente dos boxes "Você Tem Problemas"). Porém, esses problemas práticos são bem parecidos com os exemplos, então você pode sempre voltar e revisar caso se esqueça de algo ou precise praticar mais.

Está pronto? Tem muita prática nestas páginas que se seguem – como alguns problemas têm diversas partes, temos aqui mais de 110 problemas práticos! (Calma, ninguém disse que você precisa resolver tudo de uma vez).

Capítulo 2

1. Coloque a equação linear na forma padrão: $-3(x + 2y) - 4y + 8 = x - 1$.
2. Determine a equação da linha que passa pelo ponto (–5,3) e tem inclinação $-\frac{1}{2}$; escreva-a na forma padrão.
3. Calcule a inclinação da linha que passa pelos pontos (2,–3) e (–5,–8).
4. A linha *n* passa pelo ponto (2,–1) e é perpendicular à linha $3x - 5y = 2$. Escreva a equação de *n* na forma padrão.
5. Simplifique a expressão $\frac{\left(2xy^3\right)^3}{\left(9x^4y^2\right)^2}$.
6. Fatore completamente a expressão: $32x^2 - 98y^2$.
7. Resolva a equação $2x^2 - 16x = 22$ completando o quadrado e justifique a sua resposta resolvendo-a novamente, mas pela fórmula quadrática.

Capítulo 3

8. Se $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x - 4$, avalie $f(g(h(13)))$.
9. Determine que tipo de simetria (se houver) é evidenciado no gráfico de $y = x^5 - x^3 + x - 5$.
10. Encontre a função inversa, $f^{-1}(x)$ se $f(x) = 5x - 3$; verifique que $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são inversas demonstrando que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.
11. Coloque as equações quadráticas $x = 2t + 6$, $y = \sqrt{t-1}$ na forma retangular.

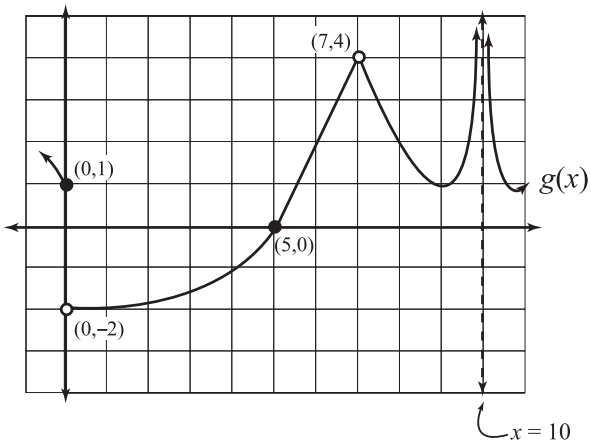
Capítulo 4

12. Se $\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{4}$, calcule csc θ e cot θ.
13. Avalie $\operatorname{sen}\frac{14\pi}{3}$ usando um ângulo coterminal e o círculo unitário.
14. Fatore e simplifique a expressão trigonométrica $1 - \tan^4\theta$.

15. Resolva a equação $\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)\left(\operatorname{sen} x-1\right)=0$ e dê todas as soluções no intervalo [0,2π).

Capítulo 5

16. Avalie os limites no gráfico abaixo.



(a) $\lim_{x\to 10} g(x)$

(b) $\lim_{x\to 7} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 0} g(x)$

(d) $\lim_{x\to 5} g(x)$

Capítulo 6

17. Avalie os limites usando substituição:
(a) $\lim_{x\to \pi/4} \left(x\cdot \operatorname{sen} x\right)$

(b) $\lim_{x\to 2a} \left(x^2-3x+1\right)$

18. Avalie os limites usando o método da fatoração:
(a) $\lim_{x\to -(3/2)} \dfrac{2x^2+7x+6}{2x+3}$

(b) $\lim_{x\to -4} \dfrac{3x^2+11x-4}{5x^2+23x+12}$

19. Avalie $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+5}-1}{x+4}$ usando o método da conjugação.

20. Avalie o limite de $g(x)=\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-2x-3}$ à medida que x se aproxima de cada valor para o qual $g(x)$ é indefinida.

21. Avalie os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9-x^2}{5+7x-3x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+6x^2}{19x^2-5x+2}$

(c) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos4\theta}{\theta}$

Capítulo 7

22. Determine se a função $f(x)$, definida abaixo, é contínua em $x = 4$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-13x-12}{x-4} & ,x\neq4\\ 19 & ,x=4\end{cases}$$

23. Encontre o valor de c que torna a função $g(x)$ contínua em todos os pontos.

$$g(x)=\begin{cases}x^2+3x-5 & ,x\leq1\\ x-c & ,x>1\end{cases}$$

24. Encontre os valores de x para os quais a função $h(x)=\dfrac{x^2-12x+35}{2x^2-13x-7}$ é descontínua e classifique cada caso de descontinuidade.

25. O Teorema do Valor Médio garante os valores da seguinte função para $f(x) = 3x^2 - 12x + 4$ no intervalo fechado [0,5]? Por quê?

(a) 10

(b) 20

Capítulo 8

26. Use o quociente diferencial para encontrar a derivada de $f(x) = x^3 - 2x$ e avalie $f'(-3)$.

27. Determine $g'(1)$ se $g(x) = 3x^2 - 8x + 2$, usando a fórmula alternativa do quociente diferencial.

Capítulo 9

28. Encontre a derivada de cada expressão em relação a x:

    (a) $2x^5 + 6x^4 - 7x^3 + \frac{1}{5}x^2 - x + 9$

    (b) $(3x^2 + 4)(9x - 5)$

    (c) $\frac{2x^3 + 1}{x^2 - 4}$

    (d) $(x^2 - 7x + 2)^{10}$

    (e) $\sqrt{x^3}(2x - 3)^4$

29. Dada a função $h(x) = 3x^4 - 9x^2 + 2$, calcule os seguintes valores:
    (a) a taxa de variação média de $h(x)$ no intervalo de x [-1,3].
    (b) a taxa de variação instantânea de $h(x)$ quando $x = 2$.

30. Dada a função $f(x) = \tan(\cos x)$, calcule $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Capítulo 10

31. Encontre a equação da tangente de $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ quando $x = \pi$. *Dica*: use a *regra do produto para diferenciar* $f(x)$.

32. Encontre a inclinação da tangente no gráfico de $x^2 - 7xy - 4y^2 + y - 9 = 0$, ponto (–3,0).

33. Dada a função $g(x) = x^3 - 4$, avalie $(g^{-1})'(-3)$.

34. Se $h(x) = -2x^3 - 5x + 3$, calcule $(h^{-1})'(-1)$.

35. Dada as equações $x = \cos\theta$ e $y = 2\theta$, determine $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Capítulo 11

36. Se $f(x) = x^3 - 16x$, encontre $f'(x)$, determine os números críticos e se $f(x)$ muda de direção em cada um deles.

37. Se uma função $g(x)$ tiver derivada $g'(x) = \frac{(x+3)(x-5)(x+4)}{x-1}$, use um gráfico de sinais para determinar os intervalos nos quais $g(x)$ é decrescente.

38. Quais os valores absolutos máximo e mínimo de $h(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$ no intervalo fechado [-4,3]?

39. Em que intervalo $f(x) = x^3 - 8x^2 + 9x - 12$ é côncava para cima?

40. Use o teste da segunda derivada para classificar os extremos relativos da função $g(x) = x^3 + \dfrac{13}{2}x^2 - 30x + 19$.

Capítulo 12

41. Um peixinho dourado nada de um lado para o outro em um aquário grande com um baú de tesouro de plástico e borbulhante. No instante t, a posição horizontal do peixinho (em relação ao baú de tesouro) é $s(t) = \dfrac{t^2}{9} - \cos 4t - 3$ polegadas. (Se $s(t) > 0$, o peixinho está à direita do baú, se $s(t)$ for negativo, está à esquerda).
    (a) em que instante(s) o peixinho está 3,5 cm à esquerda do baú?
    (b) calcule a rapidez do peixinho em $t = 4{,}2$ segundos.
    (c) qual é a velocidade média do peixinho entre $t = 0$ e $t = 5$?
    (d) em que (ou quais) intervalo(s) o peixinho tem aceleração positiva entre $t = 0$ e $t = 2$ segundos?

42. Se Nick atira uma bola de beisebol no ar de uma altura inicial de 3 m a uma velocidade de 10 m/s, qual é a altura máxima que a bola vai alcançar?

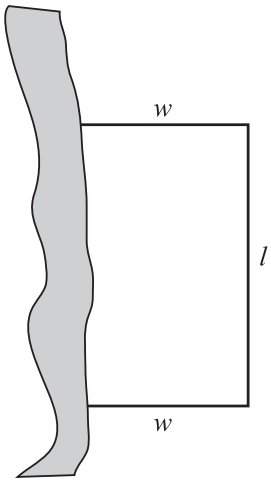
Capítulo 13

43. Avalie $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{2x - \pi}$.

44. Dada a função $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$, encontre o valor de x que satisfaça o Teorema do Valor Médio no intervalo [–1,1].

45. Se escapar ar de um balão esférico a uma taxa de 2 cm³/h, com que rapidez o raio do balão está decrescendo (em cm³/h) quando seu volume é $\dfrac{4000\pi}{3}$ cm³? *Dica: A fórmula para o volume de uma esfera é* $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

46. Um fazendeiro tem um lote de terra no limite leste de um rio. Ele quer delimitar um pasto retangular, mas usará cerca apenas para três lados, confiando que o rio delimitará o lado remanescente desse pasto, como ilustrado a seguir.



Quais as dimensões do maior pasto que ele pode delimitar utilizando 2.500 metros de cerca?

Capítulo 14

47. Aproxime a área abaixo da curva $f(x) = \sqrt{x-3}$ no intervalo [4,8] usando:
    (a) soma à direita com $n = 8$ retângulos.
    (b) soma média com $n = 4$ retângulos.
    (c) regra do trapézio com $n = 4$ trapézios.
    (d) regra de Simpson com $n = 6$ subintervalos.

Capítulo 15

48. Avalie $\int\left(x^5 - 4x^3 + \frac{x}{8} - 7 + 5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$.

49. Calcule a área abaixo da curva $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo [4,8] usando um intervalo definido.

50. Calcule a derivada: $\frac{d}{dy}\left(\int_{-4}^{y^3} \cos w\, dw\right)$.

51. Integre por meio da substituição *u*:
    (a) $\int \sec 5x\, dx$.

    (b) $\int_0^3 x \cdot e^{x^2}\, dx$.

Capítulo 16

52. Encontre a área entre as funções $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=\frac{x}{3}$.

53. Encontre o valor garantido pelo Teorema do Valor Médio para Integração na função $h(x)=\frac{1}{1+x^2}$ no intervalo [0,1].

54. A velocidade de uma partícula que se movimenta horizontalmente ao longo do eixo *x* é modelada pela equação $v(t) = t^3 - 7t + 6$, medida em polegadas por segundo. Use essa informação para responder às questões:
    (a) Qual é o deslocamento total da partícula entre $t = 0$ e $t = 3$?
    (b) Qual é a distância total percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 3$?

55. Se $f(x)=\int_0^{x^2} e^{3t}\,dt$, avalie:
    (a) $f(1)$.
    (b) $f'(1)$.

Capítulo 17

56. Integre:
    (a) $\int \frac{3x^2-4x+1}{x}\,dx$.
    (b) $\int \frac{x-6}{x+5}\,dx$.
    (c) $\int \frac{e^x}{e^x\sqrt{e^{2x}-9}}\,dx$.
    (d) $\int \frac{dx}{x^2+8x+18}$.

Capítulo 18

57. Use a integração por partes para integrar $\int x^2 \cos x\,dx$.

58. Integre a expressão do problema 57 ($\int x^2 \cos x\,dx$) usando uma tabela de integração por partes e verifique que as soluções são idênticas.

59. Use a decomposição parcial de fração para integrar $\int \frac{dx}{x^2-8x+12}$.

60. Avalie a integral imprópria $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Capítulo 19

61. Encontre o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 7$ sobre a linha $y = 7$. *Dica*: Coloque $f(x) = g(x)$ para encontrar os pontos finais do sólido.

62. Calcule o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas linhas $y = \frac{1}{2}x$, $y = 6$ e $x = -2$ sobre a linha $x = -5$.

63. Escreva a expressão integral que representa o volume gerado pela rotação da área delimitada pelas curvas $y = \text{sen } x$, $y = 1$ e $x = 0$ sobre a linha $x = -5$.

64. Escreva uma expressão integral que represente o comprimento de cada gráfico descrito abaixo, e então use um computador ou um calculador de gráfico para computar cada integral.
    (a) $f(x) = \tan x$, entre $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

    (b) a curva paramétrica $x = e^{2t}$, $y = \ln(4t + 2)$ no intervalo t [0,3].

Capítulo 20

65. Resolva a equação diferencial $x^2dy = -2dx$.

66. Com o lançamento de seu CD em 2005, Dane Cook fez história com um dos álbuns de comédia mais vendidos de todos os tempos. Seu próximo CD venderá a uma taxa aproximada de $\frac{dy}{dt} = \frac{10}{t^2 + 25}$ milhões de unidades por dia, e ele terá vendido 1,85 milhões de cópias ao final do primeiro dia! Use essa informação para responder às seguintes perguntas:
    (a) Que equação, $y(t)$, mostra as vendas desse CD? *Nota: Calcule C limitado a 4 casas decimais.*
    (b) Quantos CDs aproximadamente Dane terá vendido exatamente 730 dias (2 anos) após seu lançamento? *Nota: Mais uma vez, limite a sua resposta a quatro casas decimais.*

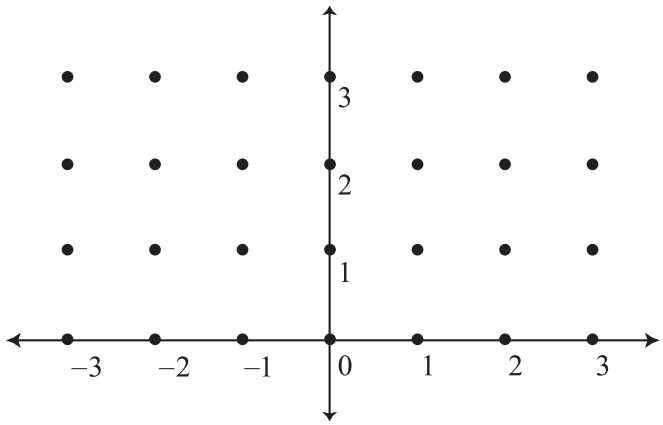
67. Ignorando os padrões de limpeza e tendo escolhido viver uma vida sórdida, você inventou um novo tipo de arma química feita com *Cheetos* empapados, cereais e leite podre, e ovos de Páscoa com prazos de validade vencidos.
    O lado ruim disso é que o governo resolveu colocá-lo em quarentena dentro de sua casa imunda até que a sua mistura nojenta se desintegre um pouco. Com um desenvolvimento perturbador, eles determinaram que (assim como o lixo nuclear) a sua arma tem uma meia-vida, e eles têm quase certeza de que é de quatro dias.

Assumindo que isso seja verdadeiro, quanto tempo vai levar até que 3.000 gramas dessa gororoba tenha um declínio para uma quantidade segura (mas igualmente fedida) de 10 gramas?

Capítulo 21

68. Estime o valor de $\sqrt{9{,}1}$ sem calculadora usando uma aproximação linear para $f(x)=\sqrt{x}$ centrada em $x = 9$.

69. Desenhe o campo de direção para $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y+1}$ calculando as inclinações de cada ponto indicado no plano coordenado a seguir:



Esboce a solução específica da equação diferencial que contém o ponto (0,1).

70. Se você começa no ponto $\left(\frac{1}{3},-2\right)$ e avança $\Delta x=\frac{1}{5}$ unidades à direita ao longo da linha com inclinação $m=\frac{3}{8}$, quais as coordenadas do seu destino?

71. Use o Método de Euler com três passos de extensão $\Delta x=\frac{1}{4}$ para aproximar $y\left(-\frac{1}{4}\right)$ se $\frac{dy}{dx}=xy$, dado que o gráfico da solução passa por (–1,1).

Capítulo 22

72. A sequência $\left\{\frac{3-4n+5n^2}{6-8n-7n^2}\right\}$ é convergente ou divergente?

73. Como o teste de divergência do *n*-ésimo termo garante que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-15}{2n^2}$ seja uma série divergente?

74. Determine se a série geométrica a seguir converge ou não:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{20}-\frac{1}{40}+\frac{1}{80}-\frac{1}{160}+\cdots$$

Se sim, calcule a soma da série.

75. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 4\sqrt[5]{n^{-2}}$ é convergente ou divergente?

76. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)$.

Capítulo 23

77. Você já sabe que a série $p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, pois $p = 1$ não é maior que 1. Use o teste da integral para confirmar essa afirmação.

78. Use o teste da comparação para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n}$ converge ou não.

79. Determine a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^5+3n^3-n+6}{7n^9-136}$ usando o teste da comparação do limite.

80. Use o teste da razão para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$.

81. Use o teste da raiz para determinar a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-3)^n}{n^{2n}}$.

82. Use o teste da série alternada para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\cos n\pi)}{n^2+4n-3}$ converge ou não e explique por que se trata de uma série alternada mesmo sem conter $(-1)^n$ ou $(-1)^{n+1}$.

83. Determine a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 5^n}{(n-1)!}$ testando se converge absolutamente ou não.

Capítulo 24

84. Encontre o raio de convergência da série de potência $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x+2)^n}{(n-2)!n^2}$.

85. Encontre o intervalo de convergência da série de potência $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

86. Use um polinômio de sexto grau de Maclaurin para $f(x) = \cos x$ para aproximar $\cos\frac{1}{3}$.

87. Aproxime sen 1,5 usando um polinômio de Taylor de quinto grau para $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrado em $x = \frac{\pi}{2}$. *Nota: O polinômio é centrado em* $x = \frac{\pi}{2}$ *já que* $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$, *é um valor próximo de 1,5.*

Soluções

Capítulo 2: (1) $4x + 10y = 9$; (2) $x + 2y = 1$; (3) $\frac{5}{7}$; (4) $5x + 3y = 7$; (5) $\frac{8y^5}{81x^5}$; (6) $2(4x + 7y)(4x - 7y)$; (7) $x = 4 - 3\sqrt{3}$ ou $x = 4 + 3\sqrt{3}$.

Capítulo 3: (8) –3; (9) sem simetria; (10) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}(5x - 3) + \frac{3}{5} = 5\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right) = x$; (11) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 4}$

Capítulo 4: (12) $\csc\theta = -\frac{4}{3}$ e $\cot\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$; (13) $\operatorname{sen}\frac{14\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; (14) $\sec^2\theta(1 + \tan\theta)(1 - \tan\theta)$; (15) $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

Capítulo 5: (16a) não existe $\lim_{x\to 10^+} g(x) = \lim_{x\to 10^-} g(x) = \infty$, mas ∞ não é um número finito; (16b) 4; (16c) não existe $\left(\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)\right)$; (16d) 0.

Capítulo 6: (17a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$; (17b) $4a^2 - 6a + 1$; (18*a*) $\frac{1}{2}$; (18*b*) $\frac{13}{17}$; (19) $\frac{1}{2}$; (20) $\lim_{x\to 3} g(x) = -\frac{5}{4}$, $\lim_{x\to -1} g(x)$ não existe; $\frac{1}{3}$; (21b) não existe; (21c) 0.

Capítulo 7: (22) Como $f(4) = \lim_{x\to 4} f(x) = 19$, $f(x)$ é contínua em $x = 4$; (23) $c = 2$; (24) $x = -\frac{1}{2}$ (descontinuidade infinita) e $x = 7$ (ponto de descontinuidade); (25a) sim, pois $f(0) = 4$, $f(5) = 19$, e $4 \le 10 \le 19$; (25b) não, pois 20 não cai entre os valores da função dos pontos finais $f(0) = 4$ e $f(5) = 19$.

Capítulo 8: (26) $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(-3) = 25$; (27) $g'(1) = -2$.

Capítulo 9: (28a) $10x^4 + 24x^3 - 21x^2 + \frac{2}{5}x - 1$; (28b) $81x^2 - 30x + 36$;
(28c) $\frac{2x^4 - 24x^2 - 2x}{x^4 - 8x^2 + 16}$; (28d) $10(x^2 - 7x + 2)^9(2x - 7)$;
(28e) $\frac{(2x-3)^4}{3x^{2/3}} + 8\sqrt[3]{x}(2x-3)^3$, *Nota: Use a regra do produto e tire a derivada de* $(2x - 3)^4$ *com a regra da cadeia*; (29a) 42; (29b) 60;
(30) $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sec^2\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(-\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

Capítulo 10: (31) $y = -\pi^2 x + \pi^3$, *Note*: $f(\pi) = 0$ e $f'(\pi) = -\pi^2$;
(32) $y' = \frac{-2x + 7y}{-7x - 8y + 1} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$;
(33) $\frac{1}{3}$; (34) $\left(h^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{-6(0.676280053)^2 - 5} \approx -0{,}129$;
(35) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{-\text{sen}\,\theta} = -2\csc\,\theta$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\cos\,\theta}{\text{sen}^3\,\theta} - 2\csc^2\,\theta\,\cot\,\theta$.

Capítulo 11: (36) $f(x)$ muda de crescente para decrescente em $x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \approx -2{,}309$, pois $f'(x)$ muda de positiva para negativa nessa localização; similarmente, $f(x)$ muda de decrescente para crescente em $x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \approx -2{,}309$, pois $f'(x)$ muda de negativa para positiva nessa localização; (37) $g(x)$ é decrescente em (–4,–3) e (1,5); (38) máximo = 0, mínimo = –9; (39) $\left(\frac{8}{3}, \infty\right)$; (40) $x = \frac{5}{3}$ é um mínimo relativo porque $g''\left(\frac{5}{3}\right) = 23 > 0$, $x = -6$ é um máximo relativo porque $g''(-6) = -23 < 0$.

Capítulo 12: (41a) t = 0,2596, t = 1,3756, e t = 1,7194 segundos; (41b) $|s'(4{,}2)| = \left|\frac{2}{9}(4{,}2) + 4\text{sen}\,(16{,}8)\right| \approx |-2{,}617| = 2{,}617$ cm/seg; (41c) 0,6739 cm/seg; (41d) (0; 0,3962) e (1,1746; 1,9670); (42) 8 m (quando $t = 1$ segundos).

Capítulo 13: (43) $-\frac{1}{2}$; (44) $x = 0$; (45) $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{200\pi} \approx -0{,}001592$ cm/h, *Nota:* $\frac{dV}{dt} = -2$ *já que o volume é decrescente,* $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$; trate π como uma constante quando diferenciar; se o volume é $\frac{4000\pi}{3}$, você pode determinar que $r =$ 10 — coloque $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4000\pi}{3}$ e resolva r; (46) $w = 625$ m, $l = 2500 - 2(625) = 1250$ m.

Nota: O perímetro do pasto é $2w + l = 2500$ *então* $l = 2500 - 2w$, *coloque isso na equação primária* $A = lw$ *para obter* $A = (2500 - 2w)w$ e otimize.

Capítulo 14: (47a) $\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{9}{2}\right) + f(5) + f\left(\frac{11}{2}\right) + f(6) + f\left(\frac{13}{2}\right) + f(7) + f\left(\frac{15}{2}\right) + f(8)\right) \approx 7.090$;

(47b) $1\left(f\left(\frac{9}{2}\right) + f\left(\frac{11}{2}\right) + f\left(\frac{13}{2}\right) + f\left(\frac{15}{2}\right)\right) \approx 6{,}798$;

(47c) $\frac{1}{2}\left(1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4 + \sqrt{5}\right) \approx 6{,}764$;

(47d) $\frac{8-4}{3(6)}\left[f(4) + 4f\left(\frac{14}{3}\right) + 2f\left(\frac{16}{3}\right) + 4f(6) + 2f\left(\frac{20}{3}\right) + 4f\left(\frac{22}{3}\right) + f(8)\right] \approx 6{,}787.$

Capítulo 15: (48) $\frac{x^6}{6} - x^4 + \frac{1}{16}x^2 - 7x + 3x^{5/3} + C$; (49) $\frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{16}{3}$; (50) $3y^2 \cos y^3$; (51a) $\frac{1}{5}\ln\left|\sec 5x + \tan 5x\right| + C$, Nota: coloque $u = 5x$; (51b) $\frac{1}{2}\left(e^9 - 1\right)$.

Capítulo 16: (52) $\int_0^9 \left(x^{1/2} - \frac{1}{3}x\right)dx = \frac{9}{2}$; (53) $h(c) = \frac{\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}}{1-0} = \text{arctg}\, x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$; (54a) $\int_0^3 v(t)\,dt = \frac{27}{4} = 6{,}75$; (54b) $\int_0^1 v(t)\,dt - \int_1^2 v(t)\,dt + \int_2^3 v(t)\,dt = \frac{33}{4} = 8{,}25$; (55a) $f(1) = \int_0^{1^2} e^{3t}\,dt = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}$; (55b) $f'(1) = e^{3\left(x^2\right)} \cdot 2x = 2e^3$.

Capítulo 17: (56a) $\frac{3}{2}x^2 - 4x + \ln|x| + C$; (56b) $x - 11\ln|x+5| + C$;
(56c) $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\left(\frac{e^x}{3}\right) + C$; (56d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+4}{\sqrt{2}}\right) + C$.

Capítulo 18: (57) $x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$;

(58)

u	dv	± 1
x^2	$\cos x$	$+1$
$2x$	$\operatorname{sen} x$	-1
2	$-\cos x$	$+1$
0	$-\operatorname{sen} x$	-1
		$+1$

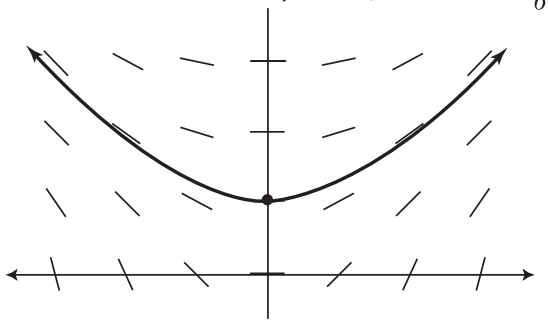
$x^2\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$

(59) $\frac{1}{4}\ln|x-6| - \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$

Capítulo 19: (61) $\pi\int_{-3}^{3}\left(7-\left(x^2-2\right)\right)^2 dx = \frac{1296\pi}{5}$;
(62) $\pi\int_{-1}^{6}\left[\left(2y-(-2)\right)^2 - \left(-2-(-5)\right)^2\right]dy = \frac{1183\pi}{3}$; (63) $2\pi\int_{0}^{\pi/2}(x+5)(1-\operatorname{sen} x)\,dx$,
Nota: Use o método das cascas cilíndricas; (64a) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sqrt{1+\sec^4 x}\,dx \approx 1{,}277$, *Nota: talvez você precise colocar sec⁴ x em seu computador ou calculadora como (1/cos(x))⁴*;
(64b) $\int_0^3\sqrt{\left(2e^{2t}\right)^2 + \left(\frac{4}{4t+2}\right)}\,dt \approx 402{,}616$.

Capítulo 20: (65) $y = \frac{2}{x} + C$; (66a) $y(t) = 2\arctan\left(\frac{t}{5}\right) + 1{,}4552$; *Nota:*
$y(t) = \int\frac{10\,dt}{t^2+25} = 10\cdot\frac{1}{5}\cdot\arctan\left(\frac{t}{5}\right) + C$ *e y(1) = 1,85, então você precisa resolver a equação* $1{,}85 = 2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + C$ *em C*; (66b) y(730) = 4,5831, então 4.583.100 cópias serão vendidas em dois anos; (67) 32,915 dias. *Nota:* $y(t) = 3000e^{-0.173287t}$.

Capítulo 21: (68) 3,01667, *Nota: A aproximação linear é* $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$; (69)



(70) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5},-2+\frac{3}{40}\right)=\left(\frac{8}{15},-\frac{77}{40}\right)$; (71) $y\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{273}{512}$, *Nota: As coordenadas dos três passos são* $\left(-1+\frac{1}{4},1-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4},\frac{3}{4}-\frac{9}{64}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{39}{64}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{39}{64}-\frac{39}{512}\right)=\left(-\frac{1}{4},\frac{273}{512}\right)$.

Capítulo 22: (72) A sequência converge porque $\lim_{n\to\infty}\frac{3-4n+5n^2}{6-8n-7n^2}=-\frac{5}{7}$; (73) Note que $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-15}{2n^2}=\frac{1}{2}$; como o limite não é 0, a série não pode convergir. (74) Série geométrica convergente com $a=\frac{1}{5}$ e $r=-\frac{1}{2}$, então soma $=\frac{1/5}{1-(-1/2)}=\frac{2}{15}$; (75) série *p* divergente com $p=\frac{2}{5}$; (76) $-\frac{3}{2}$.

Capítulo 23: (77) Como $\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{dn}{n}=\lim_{a\to\infty}\ln|a|=\infty$, a integral diverge e a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ também; (78) Cada termo em $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n}$ é maior do que o seu termo correspondente na série *p* divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, então $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n}$ também deve divergir;

(79) A série converge porque existe $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{4n^5+3n^3-n+6}{7n^9-136}}{\dfrac{1}{n^4}}$ e a série de comparação $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ é uma série *p* convergente;

(80) Como $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\dfrac{n^3}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot n^3}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^3}{n^3+3n^2+3n+1}=3$, a série diverge;

(81) Como $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n-3}{n^2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{n^2}=0$, a série converge;

(82) Como $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+4n-3}=0$ e cada termo da série é menor do que o seu precedente, a série alternada converge. Nota: cos *n*π alterna entre –1 e 1 para valores consecutivos de *n*, então se comporta exatamente como $(-1)^n$;

(83) Como a série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(n-1)!}$ converge de acordo com o Teste da Razão $\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}}{n!}\cdot\dfrac{(n-1)!}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=0\right)$, então $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 5^n}{(n-1)!}$ converge absolutamente.

Capítulo 24: (84) raio de convergência = 1, *Nota: De acordo com o Teste da Razão,* $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^3(x+2)}{n^3+n^2-n-1}\right|<1$ então $|x+2|<1$, (85) [–2,8);

(86) $\cos\dfrac{1}{3}\approx 1-\dfrac{(1/3)^2}{2}+\dfrac{(1/3)^4}{4!}+\dfrac{(1/3)^6}{6!}\approx 0{,}94496$

(87) $\operatorname{sen}1{,}5\approx 1-\dfrac{(1{,}5-\pi/2)^2}{2!}+\dfrac{(1{,}5-\pi/2)^4}{4!}\approx 0{,}9975.$

Apêndice A

Respostas de "Você Tem Problemas"

Todas as respostas para os problemas que o assombraram ao longo do livro estão listadas aqui, organizadas por capítulo. Todas as etapas importantes são mostradas, a menos que a habilidade necessária para completar um problema já tenha sido discutida em um capítulo anterior. Por exemplo, você aprendeu a usar a substituição *u* no Capítulo 15. Não vou mais focar nesses detalhes se os problemas do capítulo seguinte também requererem a substituição *u* em suas soluções. Se não fosse assim, só este apêndice seria um outro livro. Já imaginou?

Capítulo 2

1. $6x + 9y = 11$. Não se esqueça de que $6x$ tem de ser positivo para que esteja na forma padrão. Talvez você precise multiplicar tudo por -1.
2. $2x - 3y = 6$. Você pode tratar $(0,-2)$ como um ponto ou usar como ponto de intersecção com y, então ambas as formas funcionam.
3. $\frac{3}{4}$. Lembre-se de que $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$.
4. $\frac{9y^4}{x^6}$. Quando você eleva tudo ao quadrado, você obtém $9x^{-6}y^4$, e o expoente negativo tem de ser movido.

5. $7xy(x - 3y^2)$. O maior fator comum é $7xy$, então divida cada termo para chegar à forma fatorada e escreva $7xy$ na frente de tudo.
6. $(2x + 7)(4x^2 - 14x + 49)$. Essa é uma soma de cubos perfeitos; $a = 2x$ e $b = 7$.
7. $x = 0, -4$. **Método um**: fatore $3x$. **Método dois**: primeiro divida por 3 para obter $x^2 + 4x = 0$. A metade de 4 é 2, cujo quadrado é 4, e deve ser adicionado aos dois lados. **Método três**: $a = 3$, $b = 12$ e $c = 0$, pois não há termo constante.

Capítulo 3

1. 4. $f(43) = 7$; $g(7) = 64$; $h(64) = 4$.
2. Simétrico em relação à origem. Coloque $-x$ em x e $-y$ em y para obter $-y = \frac{-x^3}{|x|}$. Multiplique os dois lados por -1, e você chegará à função original.
3. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+6}\right)^2 - 3 = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right) + 6} = x$, uma vez que a simplificação está completa.
4. $h^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$. Depois de trocar x e y, subtraia 5 de ambos os lados e elimine $\frac{2}{3}$ multiplicando cada lado da equação por $\frac{3}{2}$.
5. $y = x^2 - 3x + 3$. Comece resolvendo a equação de x para t ($t = x - 1$), coloque isso nos pontos t da equação y e simplifique.

Capítulo 4

1. 0. Simplifique $\frac{14\pi}{4}$ para obter $\frac{7\pi}{2}$. Subtraia 2π $\left(\text{ou } \frac{4\pi}{2}\right)$ para obter $\frac{3\pi}{2}$; $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{14\pi}{4} = 0$.
2. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.
3. $\operatorname{sen} 2x \cos 2x$. Fatore o maior fator comum de $2\operatorname{sen} x \cos x$ para obter $2\operatorname{sen} x \cos x(1 - 2\operatorname{sen}^2 x)$ e use fórmulas de duplo ângulo para substituir em cada fator.
4. $x = 0, \pi$. Substitua $2\operatorname{sen} x \cos x$ por $\operatorname{sen} 2x$ e fatore para obter $2\operatorname{sen} x(\cos x + 1) = 0$; resolva cada equação igualada a 0.

Capítulo 5

1. $-\infty$. O gráfico decresce infinitamente quando nos aproximamos de $x = -4$ a partir da esquerda. Você também pode responder que não há limite porque o gráfico decresce infinitamente – as duas respostas são equivalentes.
2. Não existe. O limite à esquerda (–2) não é igual ao limite à direita (3), então não há limite geral.
3. 1. Os limites à esquerda e à direita são 1, então há limite geral e seu valor é 1.

Capítulo 6

1. (a) $-\frac{1}{\pi}$. Coloque π para cada x para obter $\frac{\cos\pi}{\pi}$; você já sabe que cos π = –1 pelo círculo unitário.

   (b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{(-2)^2+1}{(-2)^2-1}=\frac{4+1}{4-1}=\frac{5}{3}$.

2. (a) 13. Fatore o numerador para obter $(2x + 3)(x - 5)$; cancele os termos $(x - 5)$ e coloque $x = 5$ em $2x + 3$.

   (b) 3. O numerador é a diferença dos cubos perfeitos (lembra-se da fórmula?) que fatora para $(x - 1)(x^2 + x + 1)$; o termo $(x - 1)$ cancela, restando apenas $x^2 + x + 1$; substitua $x = 1$ nessa expressão para obter a resposta.

3. (a) 4. Multiplique o numerador e o denominador por $\sqrt{x+6}+2$ e cancele, resultando em $(x + 2)$ termos para obter $\lim_{x\to -2}\left(\sqrt{x+6}+2\right)$; substitua $x = -2$.

   (b) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$. Eu enganei você? Você não deve usar o método da conjugação aqui, pois a substituição funciona; para chegar à resposta apenas coloque $x = 1$ em todos os x (não dá para simplificar).

4. Fatore até chegar a $\frac{x(2x-1)(x-1)}{x(2x-1)(x+3)}$. A função é indefinida em $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = -3$. Usando o método da fatoração, temos $\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to 1/2} g(x) = -\frac{1}{7}$, então há quebras nos gráficos para esses valores. Porém, não há limite para $x = -3$, pois a substituição resulta em $-\frac{84}{0}$, o que indica que $x = -3$ é uma assíntota vertical.

5. (a) $\frac{2}{3}$. Os graus do numerador e do denominador são os mesmos.

   (b) 0. O denominador tem o grau maior; o fato de você estar aproximando $-\infty$ não é importante, pois todas as funções racionais de limite infinito se aproximam da mesma altura à medida que x se aproxima de ∞ e $-\infty$.

6. e. Separe em dois limites para obter $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^3} + \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; cada um é uma regra de limite especial separada. O primeiro limite é igual a 0 (pela terceira regra) e o outro limite é igual a e (pela última regra), então a resposta é $0 + e = e$.

Capítulo 7

1. Descontínua. Examinando a função definida por partes, fica claro que $g(1) = -2$, mas usando o método da fatoração, você chega a $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$. Como são desiguais, g é descontínua em $x = 1$.

2. $a = 12$. Note que $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 6$, porque $2(-1)^2 + (-1) - 7 = -6$. (Mesmo que $h(x)$ tecnicamente não atinja essa altura, pois a restrição do domínio é $x < -1$, -6 ainda é o limite à esquerda à medida que x se aproxima de -1). Assim, $ax + 6 = -6$ quando você coloca $x = -1$.

3. $x = 5$ (descontinuidade infinita), $x = -5$ (ponto de descontinuidade). Fatore até obter $\frac{(x+5)(2x-5)}{(x+5)(x-5)}$; existe um limite para $x = -5$, mas não para $x = 5$.

4. Como $g(1) = -2$ e $g(2) = 4$, sabemos que todos os valores entre -2 e 4 são saídas de g para $1 < x < 2$. Claramente, 0 está entre -2 e 4, então a função tem altura 0 (e tem um ponto de intersecção no eixo x) em algum lugar entre $x = 1$ e $x = 2$.

Capítulo 8

1. $g'(x) = 10x + 7$; $g'(-1) = -3$. Primeiro, calcule $g(x + \Delta x)$:

$$\begin{aligned} g(x+\Delta x) &= 5(x+\Delta x)^2 + 7(x+\Delta x) - 6 \\ &= 5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 7x + 7\Delta x - 6 \end{aligned}$$

   Depois de colocar isso no quociente diferencial e simplificar, você vai obter $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 7\Delta x}{\Delta x}$. Resolva por meio do método da fatoração.

2. $\frac{1}{6}$. Como $h(8) = \sqrt{9} = 3$, o quociente diferencial é $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$. Encontre esse limite pelo método da conjugação.

Capítulo 9

1. (a) $y' = 2x^2 + 6x - 6$. Veja aqui os bastidores do resultado:

$$y' = \left(\frac{2}{3}\cdot 3\right)x^{3-1} + \left(3\cdot 2\right)x^{2-1} - \left(6\cdot 1\right)x^{1-1} + 0$$

(b) $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{2}{5x^{4/5}}$. Comece escrevendo os termos radicais como fracionais expoentes e aplique a regra da potência:

$$f(x) = x^{1/3} + 2x^{1/5}$$

$$f'(x) = \left(1\cdot\frac{1}{3}\right)x^{1/3-1} + \left(2\cdot\frac{1}{5}\right)x^{1/5-1}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{5}x^{-4/5}$$

2. Para usar a regra da potência, você deve multiplicar para obter $g(x) = 2x^2 + 7x - 4$ e diferenciar isso para obter $g'(x) = 4x + 7$. Aplicando a regra do produto, você tem:

$$g'(x) = (2x-1)(1) + (2)(x+4)$$

$$= 2x - 1 + 2x + 8$$

$$= 4x + 7$$

3. Simplifique cuidadosamente:

$$f'(x) = \frac{(x-5)(12x^3 + 4x - 7) - (3x^4 + 2x^2 - 7x)(1)}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{(12x^4 - 60x^3 + 4x^2 - 27x + 35) - 3x^4 - 2x^2 + 7x}{x^2 - 10x + 25}$$

$$= \frac{9x^4 - 60x^3 + 2x^2 - 20x + 35}{x^2 - 10x + 25}$$

4. $10x(x^2 + 1)^4$. Aqui você tem uma função $(x^2 + 1)$ dentro de outra (x^5). Na fórmula da regra da cadeia, $f(x) = x^5$ e $g(x) = x^2 + 1$, já que $f(g(x)) = (x^2 + 1)^5$. Assim, você usa a Regra da Potência para derivar a função externa (enquanto isola $x^2 + 1$) e então multiplica pela derivada de $x^2 + 1$ para obter $5(x^2 + 1)^4 \cdot (2x)$.

5. (a) 19. A taxa de variação instantânea é sinônimo de derivada, então encontre $g'(4)$; como $g'(x) = 6x - 5$ por causa da regra da potência, $g'(4) = 19$.

(b) 1. Você vai precisar encontrar a inclinação da secante, então, primeiro, escolha os pontos representantes dos valores de $x = -1$ e 3,

colocando-os na equação. Como $g(-1) = 14$ e $g(3) = 18$, os pontos finais da secante são (–1,14) e (3,18). A inclinação da secante será $\frac{18-14}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1$.

6. Comece escrevendo cot *x* como quociente: $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$; aplique a regra do quociente para diferenciar:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{\operatorname{sen} x\left(-\operatorname{sen} x\right) - \cos x\left(\cos x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Fatore -1 no numerador e use o Teorema Mãe para substituir $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ por 1:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{-\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= -\csc^2 x$$

Capítulo 10

1. $y = 15x + 5$. O ponto de tangência é (–1,–10), e como $g'(x) = 9x^2 - 2x + 4$, $g'(-1) = 15$.
A forma ponto-inclinação nos fornece $y - (-10) = 15(x - (-1))$, que você pode colocar na forma inclinação-intercepto, como eu fiz, se desejar.

2. $\frac{2}{3}$. A derivada em relação a *x* é $4 + x\frac{dy}{dx} + y - 6y\frac{dy}{dx} = 0$. Resolva $\frac{dy}{dx}$ para obter $\frac{dy}{dx} = \frac{-4-y}{x-6y}$. Para terminar, coloque 3 em *x*, 2 em *y*, e simplifique.

3. 3. Avaliar $f^{-1}(6)$ é o mesmo que resolver $\sqrt{2x^3 - 18} = 6$. Eleve os dois lados ao quadrado para obter $2x^3 - 18 = 36$; resolva *x* somando 18 aos dois lados, dividindo os dois lados por 2 e extraindo a raiz cúbica dos dois lados da equação.

4. 0,0945. Lembre-se de que $\left(g^{-1}\right)'(-2) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(2)\right)}$ e $g^{-1}(2)$ é a solução para a equação $3x^5 + 4x^3 + 2x + 1 = -2$, que é –0,6749465398. Assim,
$\left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{g'(-0{,}6749465398)} = 0{,}0945$.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{2} = \frac{1}{2}\sec^2 t$. Essa é a derivada da parte *y* dividida pela derivada da parte *x*. Para obter a segunda derivada, derive $\frac{dy}{dx}$ (por meio da regra da cadeia) e divida por 2 (a derivada da equação original de *x*):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2(\sec t)\cdot \sec t \tan t}{2} = \frac{1}{2}\sec^2 t \tan t$$

Capítulo 11

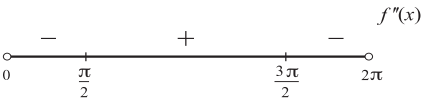
1. Antes de tudo, $h'(x) = -2x + 6$. Quando você iguala isso a 0 e resolve, você obtém o número crítico de $x = 3$. Escolha números antes e depois de 3 e coloque-os na derivada — por exemplo, $h'(2) = 2$ e $h'(4) = -2$. Como a derivada muda de positiva para negativa, a função muda de crescente para decrescente em $x = 3$, então o número crítico representa um máximo relativo.

2. Encontre a derivada: $g'(x) = 6x^2 - 7x - 3$; os pontos críticos ocorrem onde isso é igual a 0 (nunca é indefinido). Fatore até chegar a $(3x + 1)(2x - 3)$; os números críticos são $x = -\frac{1}{3}$ e $x = \frac{3}{2}$. Escolha valores de teste e coloque-os na derivada para obter esse gráfico de sinais:

Como $f'(x)$ é positiva nos intervalos $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, $f(x)$ é crescente nesses intervalos.

3. Máximo absoluto: 32; mínimo absoluto: −52. Note que $g'(x) = 3x^2 + 8x + 5$, que é fatorada em $(3x + 5)(x + 1)$, então $x = -\frac{5}{3}$ e $x = -1$ são números críticos. Um gráfico de sinais confere que eles também são extremos relativos. Teste todos os candidatos a valor de x, inclusive esses e os pontos finais: $g(-5) = -52$, $g\left(-\frac{5}{3}\right) \approx -3.852$, $g(-1) = -4$ e $g(2) = 32$.

4. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen } x$ e $f''(x) = -\cos x$. O gráfico de sinais da segunda derivada para $[0,2\pi]$ é assim:



Lembre-se de que $f(x)$ é côncava para baixo onde $f''(x)$ for negativa.

Capítulo 12

1. $t = 4$ e $t = 8{,}196$ segundos. A pergunta é: "Quando a posição é igual a −30?". Para responder, use algum tipo de tecnologia para resolver a equação $\frac{1}{2}t^3 - 5t^2 + 3t + 6 = -30$. Novamente, eu geralmente igualo tudo

a 0 e encontro os pontos de intersecção com o eixo *x* (ou seja, resolva a equação $\frac{1}{2}t^3 - 5t^2 + 3t + 36 = 0$). Respostas negativas não têm sentido e devem ser descartadas (não existe tempo negativo).

2. A ordem correta é: a velocidade média, a velocidade em $t = 7$ e, por último, a rapidez em $t = 3$. A velocidade média é a inclinação que conecta os pontos (2,–4) e (6,–48): $\frac{-48-(-4)}{6-2} = \frac{-44}{4} = -11$ cm/seg. A velocidade em $t = 7$ é $v(7) = s'(7) = 6{,}5$ pol/seg. A rapidez em $t = 3$ é o valor absoluto da velocidade nesse ponto: $|s'(3)| = |-13{,}5| = 13{,}5$ cm/seg.

3. $t = 3$ segundos. Como $s''(t) = 3t - 10$, a resposta é a solução da equação $3t - 10 = -1$.

4. 585,204 metros. A equação da posição será $s(t) = -5t^2 + 100t + 75$. O ponto mais alto alcançado pela bola de canhão é o máximo relativo da equação de posição. Como $s'(t) = -10t + 100$, $t = \frac{-100}{-10} = 10$ seg. é o momento em que a bola chega a essa altura (verifique se é o máximo usando o teste da segunda derivada se quiser — $s''(t)$ é sempre negativo). Assim, a altura máxima da bola de canhão é $s(10)$, o que equivale a 575 metros.

Capítulo 13

1. 0. Como x^{-2} tem potência negativa, mova-o para o denominador: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$. A substituição resulta em $\frac{\infty}{\infty}$, então aplique a regra de L'Hôpital (e lembre-se de que a derivada de ln *x* é: $\frac{1}{x}$: $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}$). Podemos reescrever isso como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2}$. A substituição agora resulta em 1 dividido por um número gigante, que é basicamente 0, de acordo com o nosso terceiro teorema especial de limite do Capítulo 6.

2. $x = \frac{1}{2}$. Como $g\left(\frac{1}{4}\right) = 4$ e $g(1) = 1$, a inclinação da secante é $\frac{4-1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{3}{-\frac{3}{4}} = -4$. A regra da potência nos diz que $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Assim, a solução para $-\frac{1}{x^2} = -4$ é o valor de *c* garantido pelo Teorema do Valor Médio:

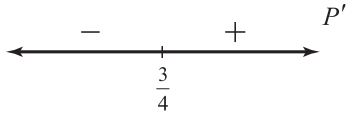
$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

Apenas $x = \frac{1}{2}$ cai no intervalo $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, então descarte a outra resposta.

3. 2 cm²/semana. Você sabe que $\frac{dV}{dt} = 5$ se V representar o volume. Vamos chamar S de área de superfície; você quer encontrar $\frac{dS}{dt}$.
A área de superfície de um cubo é $S = 6l^2$, onde l é a extensão de um lado. Pense nisso: a área da superfície de um cubo é compreendida por seis quadrados, cada um com área l^2. Diferencie essa fórmula para obter $\frac{dS}{dt} = 12l \cdot \frac{dl}{dt}$. Você sabe que $l = 10$, mas o que é $\frac{dl}{dt}$? Para descobrir, você tem de usar a informação de $\frac{dV}{dt}$, então você precisa de uma segunda equação contendo V. O volume de um cubo de lado l é $V = l^3$, então vamos derivar essa gracinha para obter $\frac{dV}{dt} = 3l^2 \cdot \frac{dl}{dt}$. Você já sabe que $\frac{dV}{dt} = 5$ e $l = 10$, então coloque-os nessa nova equação para obter $5 = 3 \cdot 10^2 \cdot \frac{dl}{dt}$, então $\frac{dl}{dt} = \frac{1}{60}$. Agora que você finalmente sabe o que é $\frac{dl}{dt}$, coloque de volta na equação $\frac{dS}{dt}$ para resolver $\frac{dS}{dt} = 12l \cdot \frac{dl}{dt} = 12(10) \cdot \frac{1}{60} = 2$ cm²/semana.

4. $-\frac{9}{8}$. Você quer otimizar o produto cuja equação é $P = xy$, onde x e y são os números em questão. Você sabe que $y = 2x - 3$, então $P = x(2x - 3) = 2x^2 - 3x$. Por fim, $P' = 4x - 3$, e o gráfico de sinais de P' é:



Assim, um dos números é $\frac{3}{4}$ e o outro é $y = 2 \cdot \frac{3}{4} - 3 = -\frac{3}{2}$. Lembre-se, você precisa encontrar o produto mínimo, então a resposta é $xy = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-3}{2}\right) = -\frac{9}{8}$.

Capítulo 14

1. A largura de todos os retângulos será $\Delta x = \frac{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{4}$. A soma à esquerda será (você pode fatorar a largura $\frac{\pi}{4}$ de cada termo para tornar as respostas mais legíveis):

$$\frac{\pi}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{4} - \cos\pi - \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 1{,}896$$

A soma à direita será:

$$\frac{\pi}{4}\left(-\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\pi - \cos\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 1{,}896$$

Você vai precisar de uma calculadora para encontrar a soma média, já que valores $\frac{\pi}{8}$ não estão, no círculo unitário:

$$\frac{\pi}{4}\left(-\cos\frac{5\pi}{8} - \cos\frac{7\pi}{8} - \cos\frac{9\pi}{8} - \cos\frac{11\pi}{8}\right) \approx 2{,}052$$

2. 1,896. Cada trapézio tem largura $\Delta x = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$, então, de acordo com a Regra do Trapézio:

$$\frac{\pi - 0}{2(4)}\left(\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(0 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot 1 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(2\sqrt{2} + 2\right) \approx 1{,}896$$

3. 1,622. Cada subintervalo tem largura $\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$; aplique a fórmula da Regra de Simpson:

$$\frac{5-1}{3\cdot 4}\left(f(1) + 4f(2) + 2f(3) + 4f(4) + f(5)\right)$$

$$= \frac{4}{12}\left(1 + 4\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(4 + \frac{13}{15}\right) = \frac{73}{45} \approx 1{,}622$$

Capítulo 15

1. $\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$. Comece escrevendo cada termo como uma integral separada com seu próprio sinal $\int$ e dx: $\int 2x^4 dx + \int \frac{1}{3}x^3 dx + \int x^{1/2} dx$. Fatore os coeficientes para obter $2\int x^4 dx + \frac{1}{3}\int x^3 dx + \int x^{1/2} dx$. Finalmente, aplique a regra da potência para integrais e simplifique:

$$2\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Não se confunda quando somar 1 à potência fracionária: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2. –2. A integral de cos *x* é sen *x* (e não –sen *x*, que é a derivada de cos *x*). Então, coloque os limites da integração na integral na ordem correta: $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2$. Essa é a área entre o gráfico de $y = \cos x$ e o eixo *x*. Como você pode ver no gráfico de cos *x*, a área está abaixo do eixo de *x*, e é por isso que a integral definida é negativa.

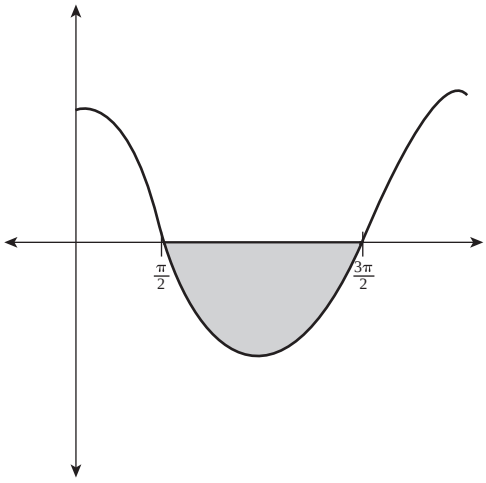


Gráfico de $y = \cos x$.

3. **Parte um:** Comece avaliando a integral definida (lembre-se que a integral de *et* é e^t: $\frac{d}{dx}\left(e^t\Big|_1^{\tan x}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\tan x} - e\right)$. Agora derive; como *e* é uma constante (não há ponto de intersecção com o eixo *x*), sua derivada é 0: $e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$. (você usa a regra da cadeia, primeiro isolando o expoente e depois multiplicando por sua derivada).

   Parte dois: Como você está derivando em relação à variável no limite superior (e o limite inferior é uma constante), coloque o limite superior na função e multiplique pela derivada do limite superior: $e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$.

4. $\frac{1}{2}$. Coloque $u = \tan x$ e $du = \sec^2 x\, dx$. Use essas duas expressões para reescrever a integral com *u*'s: $\int u\, du$. Não se esqueça dos limites da integração – coloque-os em $u = \tan x$ para obter os novos limites: $\tan(0) = 0$ e $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Integre $\int_0^1 u\, du$ para obter $\frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. Nota: você chegará à mesma resposta final se começar com $u = \sec x$ e $du = \sec x \tan x\, dx$.

Capítulo 16

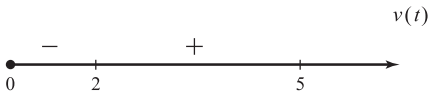
1. $\frac{1}{12}$. Essas curvas têm intersecção em $x = 0$ e $x = 1$ (que você deduz colocando $x^2 = x^3$ e resolvendo *x* para que os valores de *x* limitem a área que a função delimita). O gráfico de x^2 está acima de x^3 no intervalo, então a área será $\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx$, que é igual a:

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right) - 0 = \frac{1}{12}$$

2. 0,107. De acordo com o Teorema do Valor Médio para Integração, você sabe que $(100-1)\cdot f(c)=\int_1^{100}\frac{\ln x}{x}\,dx$. Para integrar, você precisa usar a substituição u com $u = \ln x$ e $du = \frac{1}{x}\,dx$:

$$99f(c)=\int_{\ln 1}^{\ln 100} u\,du$$
$$99f(c)=\frac{u^2}{2}\Big|_{\ln 1}^{\ln 100}$$
$$99f(c)=\frac{(\ln 100)^2}{2}-0$$
$$f(c)\approx 0{,}107$$

3. 71.000 milhas. Problemas que envolvem distâncias percorridas requerem que você use a equação da velocidade, então diferencie a equação da posição para obter $v(t) = 3t^2 - 4t - 4$. Agora crie um gráfico de sinais para $v(t)$:



O navio muda de direção (ou seja, começa a se afastar da terra) em $t = 2$, então você precisa usar integrais para velocidade — uma para [0,2] e outra para [2,5]. Como a integral em [0,2] será negativa, você precisa multiplicar por −1. A distância total será

$$-\int_0^2\left(3t^2-4t-4\right)dt+\int_2^5\left(3t^2-4t-4\right)dt$$
$$=-(-8)+63=71$$

4. $g(4\pi)=0;\ g'(4\pi)=\frac{1}{2}$.

(a) Para calcular $g(4\pi)$, coloque na integral e avalie. Você vai ter que usar a substituição u para integrar $\cos 2t$:

$$g(4\pi)=\int_{-\pi}^{(4\pi)/2}\cos 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} u)\Big|_{-2\pi}^{4\pi}=0$$

(b) Comece encontrando $g'(x)$ por meio do Teorema Fundamental parte 2 (coloque $\frac{x}{2}$ em t e multiplique por $\frac{1}{2}$). Depois, avalie a derivada normalmente:

$$g'(x)=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos x$$
$$g'(4\pi)=\frac{1}{2}\cos(4\pi)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Capítulo 17

1. $-\ln|\cos x| + x + C$. Se você criar duas funções separadamente com cos *x* no denominador de cada, terá:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\cos x}\,dx$$
$$= \int \tan x\,dx + \int 1\,dx$$

Você memorizou a integral da tangente e a integral de 1 é *x*.

2. $x + 2\ln|2x - 3| + C$. (a) Coloque $u = 2x - 3$; isso nos dá $\frac{du}{2} = dx$. Além disso, resolva a equação *u* para *x* e obtenha $x = \frac{u+3}{2}$. Substitua tudo isso na integral original e resolva:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\left(\frac{u+3}{2}\right)+1}{u}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{u+4}{u}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int du + 4\int \frac{1}{u}\,du\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(u + 4\ln|u| + C\right)$$
$$= \frac{1}{2}(2x-3) + 2\ln|2x-3| + C$$
$$= x + 2\ln|2x-3| + C$$

(b) Usando a divisão longa, reescreva $\frac{2x+1}{2x-3}$ como $1 + \frac{4}{2x-3}$; você terá a mesma resposta da parte (a).

3. $\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\sqrt{7}}\right) + C$. O denominador é um número mais uma função quadrática, ou seja, $(x^2)^2$. Tire o 3 da integral, coloque $a = \sqrt{7}$ (já que $a^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$), e iguale $u = x^2$.

Usando a substituição *u*, $du = 2x\,dx$, temos $\frac{du}{2} = x\,dx$. Usando todas essas peças, reescreva a integral e resolva:

$$\frac{3}{2}\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\sqrt{7}}\right)\right) + C$$

Se os radicais no denominador incomodam você, sinta-se livre para racionalizar os denominadores, mas a resposta é aceitável do jeito que está.

4. $\operatorname{arcsec}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$. Tire o coeficiente de 2 e complete o quadrado no radical. O $(x-3)$ fora do radical e a ordem da subtração no radical sugerem a fórmula arco-secante (a do arco-seno em geral não tem nada do lado de fora do sinal do radical no denominador):

$$2\cdot\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+9-9+5}}=2\cdot\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{(x-3)^2-4}}$$

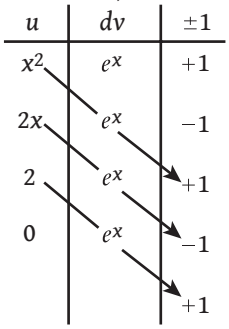
Coloque $u=x-3$ (de modo que $du=dx$) e $a=2$. Assim, você obterá exatamente a fórmula arco-secante:

$$2\cdot\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}dx=2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$$

Capítulo 18

1. $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$. Para começar, coloque $u=x^2$ e $dv=e^x\,dx$, de modo que $du=2xdx$ e $v=e^x$. Quando você coloca na fórmula por partes, obtém $x^2e^x-2\int xe^x dx$. Use a integração por partes novamente, dessa vez com $u=x$ e $dv=e^x\,dx$, para obter $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx$, que é igual a xe^x-e^x. Agora que você sabe o que é $\int xe^x dx$, coloque na fórmula original: $x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C$.

2. Usando os mesmos termos u e dv, você deve chegar a esta tabela:



Assim, a sua resposta é $x^2e^x-2xe^x-2e^x+C$.

3. $-\ln|x+3| + \ln|x+1| + C$. Você pode aplicar frações parciais, pois o denominador é fatorável:

$$\frac{2}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$$
$$2 = A(x+1) + B(x+3)$$
$$2 = Ax + A + Bx + 3B$$
$$2 = x(A+B) + (A+3B)$$

Como não tem termo x à esquerda, $A + B = 0$. Como a constante à esquerda é 2, $A + 3B = 2$. Isso nos dá duas equações com duas variáveis desconhecidas — resolva esse sistema de equações (como você fazia em álgebra básica) para chegar a $A = -1$ e $B = 1$. Termine substituindo os valores:

$$\int \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx = \int \frac{-1}{x+3}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= -\ln|x+3| + \ln|x+1| + C$$

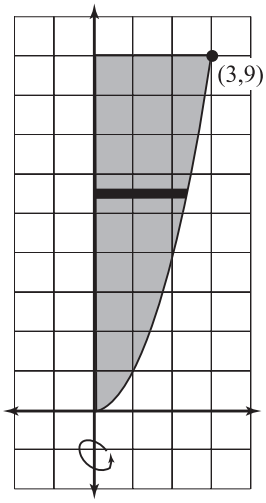
4. 2. A integral é imprópria por causa do seu limite superior de integração. Substitua o limite problemático por a e deixe que a se aproxime de ∞. Para integrar, reescreva a fração em $x^{-3/2}$ e aplique a regra da potência para integração:

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int_1^a x^{-3/2}\,dx\right)$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(-2x^{-1/2}\Big|_1^a\right)$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\Big|_1^a\right)$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{a}} - \left(\frac{-2}{\sqrt{1}}\right)\right) = 2$$

À medida que a se torna infinitamente grande, o denominador de $\frac{-2}{\sqrt{a}}$ ficará enorme, tornando a fração basicamente igual a 0 (lembra-se das regras especiais de limite no final do Capítulo 6?).

Capítulo 19

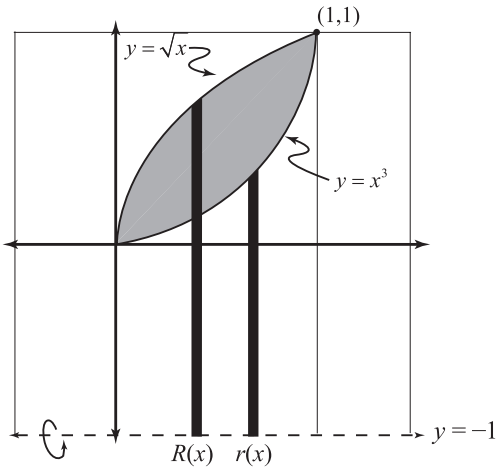
1. $\frac{81\pi}{2}$. Comece desenhando a situação:



Neste problema, o raio de rotação é horizontal – lembre-se de que deve ser perpendicular ao eixo de rotação, que é o eixo *x*. A presença de um raio horizontal de rotação indica que a função deve conter *y*, não *x*, então resolva a equação de *x* para chegar a isto: $x = \pm\sqrt{y}$; você pode ignorar o caso de $-\sqrt{y}$ já que você está limitado ao limite no primeiro quadrante. O comprimento do raio de rotação será o limite à direita menos o limite à esquerda, então $r(y) = \sqrt{y} - 0$. Coloque isso na fórmula do método do disco (usando limites de *y*, já que tudo deve ser relacionado a *y*):

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^9 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy \\ &= \pi\int_0^9 y dy \\ &= \frac{81\pi}{2} \end{aligned}$$

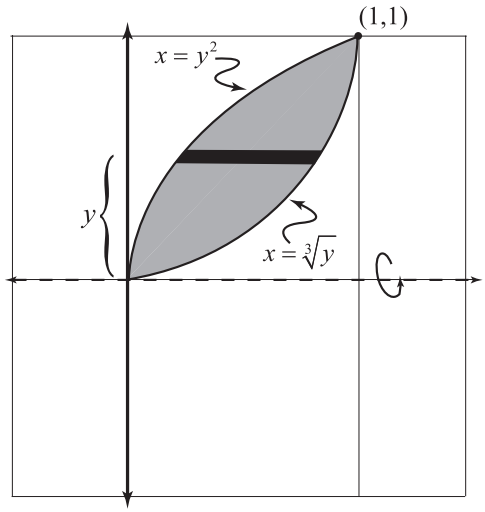
2. $\frac{25\pi}{21}$. Lembre-se de que os raios rotacionais devem se estender do eixo de rotação (que é $y = -1$ neste problema), e *não* sempre do eixo x:



Assim, $R(x) = \sqrt{x} - (-1) = \sqrt{x} + 1$ e $r(x) = x^3 - (-1) = x^3 + 1$ (subtraia o limite de baixo (–1) pelo de cima para cada). Para obter o volume correto, coloque isso na fórmula do método da rosquinha. Use limites de 0 e 1, já que eles marcam os valores de x dos pontos de intersecção do gráfico:

$$\pi\int_0^1\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\left(x^3+1\right)^2\right)dx$$
$$=\pi\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1-x^6-2x^3-1\right)dx$$
$$=\pi\int_0^1\left(-x^6-2x^3+x+2x^{1/2}\right)dx$$
$$=\frac{25\pi}{21}$$

3. $\frac{9\pi}{35}$. Se você for usar o método das cascas cilíndricas, o raio envolvido deve ser paralelo ao eixo x, então deve ser horizontal; isso significa que tudo deve estar em termos de y.
Resolva as duas equações de x para obter $x = y^2$ e $x = \sqrt[3]{y}$:



O raio está y unidades acima da origem, então $d(y) = y$, enquanto a extensão do raio é a equação da direita menos a equação da esquerda: $b(y) = \sqrt[3]{y} - y^2$. As equações têm ponto de intersecção y nos valores de 0 e 1. Coloque tudo no método das cascas cilíndricas:

$$\begin{aligned} & 2\pi\int_0^1 y\left(\sqrt[3]{y} - y^2\right)dy \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(y^{4/3} - y^3\right)dy \\ &= \frac{5\pi}{14} \end{aligned}$$

4. $g(x) = x^3$. Use a fórmula do comprimento do arco para encontrar o comprimento de cada um separadamente:

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx & & \int_0^2 \sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx & &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(3x^2\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx & &= \int_0^2 \sqrt{1 + 9x^4}\,dx \\ &\approx 4{,}6468 & &\approx 8{,}6303 \end{aligned}$$

O gráfico cúbico é mais íngreme, então ele compreende uma área maior no mesmo intervalo de x.

5. 8,268. Como $\frac{dx}{dt} = 1$ e $\frac{dy}{dt} = 2t$, o comprimento do arco será:

$$\int_1^3 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt$$
$$= \int_1^3 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$$
$$\approx 8{,}268$$

Capítulo 20

1. y = arco-seno $\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + C\right)$. Divida os dois lados por $(x^2 - 1)$ e multiplique os lados por cos y para obter:

$$\cos y\, dy = \frac{x\, dx}{x^2 - 1}$$

Integre os dois lados (use a substituição u do lado direito):

$$\text{sen } y = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + C$$

Finalmente, resolva y extraindo o arco-seno dos dois lados (ou seja, cancele seno com a sua função inversa).

2. Integre a função da aceleração para encontrar a velocidade. Como você sabe que $v(0) = -2$, substitua esses valores que você integrou:

$$v(t) = \int a(t)dt = t^2 + 5t + \cos t + C$$
$$v(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + \cos 0 + C = -2$$
$$1 + C = -2$$
$$C = -3$$

Assim, $v(t) = t^2 + 5t + \cos t - 3$. Integre para obter a função da posição, dessa vez usando $s(0) = 5$ para encontrar o C resultante:

$$s(t) = \int \left(t^2 + 5t + \cos t - 3\right)dt$$
$$= \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + \text{sen } t - 3t + C$$
$$s(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{5 \cdot 0^2}{2} + \text{sen } 0 - 3 \cdot 0 + C = 5$$
$$C = 5$$

A equação da posição final é $s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + \text{sen } t - 3t + 5$.

3. 31,434 dias. Uma coisa de cada vez; você precisa calcular *k*. A quantidade inicial é 15.000, então isso será igual a *N*. Depois de *t* = 3,82 dias, restarão 7.500 gramas, então coloque a equação do declínio exponencial:

$$y = Ne^{kt}$$
$$7,500 = 15,000e^{3,82k}$$
$$\frac{1}{2} = e^{3,82k}$$
$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3,82} = k$$
$$k \approx -0,181452$$

Assim, o modelo do declínio exponencial é $y = 15,000e^{-0,181452t}$. Iguale isso a 50 e resolva *t* para pôr um fim ao dilema:

$$y = 15.000e^{-0,181452t}$$
$$50 = 15.000e^{-0,181452t}$$
$$\frac{1}{300} = e^{-0,181452t}$$
$$t = \frac{1n\left(\frac{1}{300}\right)}{-0,181452} \approx 31,4341 \text{ dias}$$

Capítulo 21

1. 1,08715. A inclinação da linha tangente de $f(x) = \text{arctg } x$ é $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; assim, a inclinação da sua aproximação linear será $f'(2) = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$. O ponto de tangência é (2, arctg 2). Isso nos dá uma aproximação linear de...

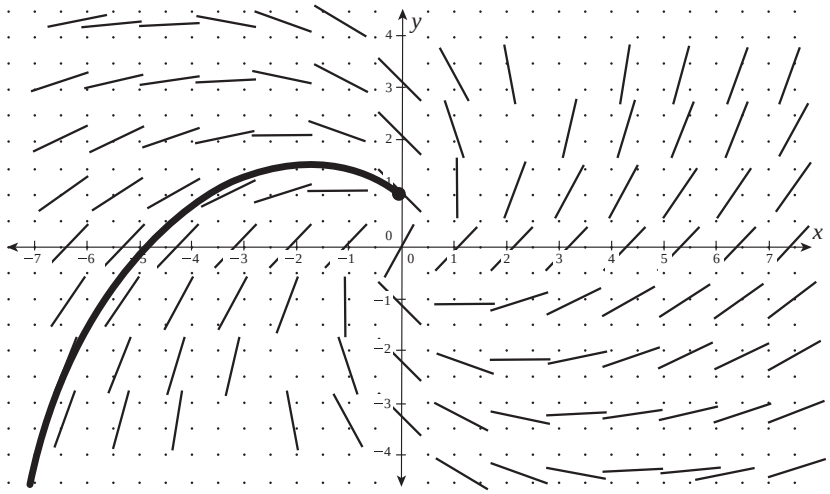
$$y - \text{arctg}\,2 = \frac{1}{5}(x - 2)$$
$$y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} + \text{arctg}\,2$$

Assim, arctg 1,9 é igual a aproximadamente:

$$\frac{1}{5}(1,9) - \frac{2}{5} + \text{arctg}\ 2 \approx 1,08715$$

É algo bem próximo do valor real: arctg (1,9) = 1,08632.

2. O campo de direção é espiralado em sentido horário; a solução específica da equação diferencial que passa por (0,1) deve ser parecida com o gráfico:



Determine o valor das inclinações substituindo na equação diferencial. Por exemplo, a inclinação do segmento no ponto (2,–1) será...

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

3. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{3}\right)$. Você está percorrendo uma distância de $\Delta x = \frac{1}{2}$ do ponto (–1,4), então use a inclinação dada para calcular Δy:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{\Delta y}{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

Portanto, você deve ir para a direita ½ e para baixo ⅓ a partir de (–1,4) para se manter na linha. Faça o ajuste das coordenadas para chegar à resposta:

$$\left(-1+\frac{1}{2}, 4-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{3}\right)$$

4. $y(1) \approx \frac{16}{27}$. Aqui estão os três passos:

Primeiro passo: $\frac{dy}{dx} = 2x - y = 2(0) - 0 = 0$; sabendo que $\Delta x = \frac{1}{3}$, encontre Δy:

$$0 = \frac{\Delta y}{1/3}$$

$$\Delta y = 0$$

Isso nos dá um novo ponto de $\left(0 + \frac{1}{3}, 0 + 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Segundo passo: $\frac{dy}{dx} = 2x - y = 2\left(\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$; sabendo que $\Delta x = \frac{1}{3}$, encontre Δy:

$$\frac{2}{3} = \frac{\Delta y}{1/3}$$

$$\Delta y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Isso nos dá um novo ponto de $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}, 0 + \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right)$.

Terceiro passo: $\frac{dy}{dx} = 2x - y = 2\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{9} = \frac{10}{9}$; sabendo que $\Delta x = \frac{1}{3}$, encontre Δy:

$$\frac{10}{9} = \frac{\Delta y}{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta y = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{27}$$

Isso nos dá um novo ponto de $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, \frac{2}{9} + \frac{10}{27}\right) = \left(1, \frac{16}{27}\right)$.

Capítulo 22

1. Diverge. A sequência converge se $\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3}{\ln n^2}$ existir. Para avaliar o limite, você deve usar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{15n^2}{\frac{1}{n^2} \cdot 2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{15n^2}{\frac{2}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{15}{2} n^3 = \infty$$

Como $\frac{15}{2} n^3$ aumenta sem limite à medida que n se aproxima do infinito, não há limite, o que torna a sequência $\left\{\frac{5n^3}{\ln n^2}\right\}$ divergente.

2. Diverge. De acordo com o teste de convergência do n-ésimo termo, $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} n$ deve divergir, já que $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen} n \neq 0$. A função seno não se aproxima de qualquer valor fixo à medida que n aumenta — ela oscila infinitamente entre os valores de 1 e –1.

3. Converge a uma soma de 12. Essa é uma série geométrica com $a = 4$ e $r = \frac{2}{3}$. Como $0 < \left|\frac{2}{3}\right| < 1$, a série converge a esta soma:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$$

4. Convergente. Você pode retirar a constante e reescrever o expoente negativo para obter esta série p: $\frac{6}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Como $p = 3$ e $3 > 1$, a série converge.

5. 1. Se você escrever a expansão, pode facilmente dizer que se trata de uma série telescópica:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

Na verdade, todos os termos da série são cancelados, exceto o 1.

Capítulo 23

1. Diverge. Se a integral $\int_1^{\infty} \frac{\ln n}{n} dn$ (que pode ser resolvida via substituição u com $u = \ln n$) divergir, a série original também divergirá:

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int_1^a \frac{\ln n}{n} dn\right)$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^{\ln a}$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{(\ln a)^2}{2}\right) = \infty$$

2. Convergente. Se não fosse o 3 no denominador, você teria uma série p, então compare a série dada com a série p convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Note que $\frac{1}{n^4+3} \le \frac{1}{n^4}$ para todos os n, já que o "+ 3" no denominador vai diminuir o valor da fração. (somar no numerador aumenta uma fração, e somar no denominador faz o oposto). Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+3}$ deve ser convergente de acordo com o teste de comparação, pois é menor do que a série p convergente.

3. Convergente. Como ambas as partes da fração contêm n elevado a uma potência, o teste da comparação do limite é uma ótima ideia. Uma boa série de comparação seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^2}$, que pode ser simplificada em $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$. Agora, calcule o limite do quociente das duas séries:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^{1/3}}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^{5/3}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{n^2+1}\cdot\frac{n^{5/3}}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

Como o limite é positivo e finito, e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}$ é uma série *p* convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$ também converge.

4. Convergente. Aplicando o teste da razão, você obtém:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n\cdot 3^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n!\cdot 3^n\cdot 3}{(n+1)\cdot n!\cdot n\cdot 3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$$

Como 0 < 1, a série converge.

5. Convergente. Você pode reescrever a série como $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^2}{n}\right)^n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{n}\right)^n$.

Aplique o Teste da Raiz, já que tudo está elevado à *n*-ésima potência:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{9}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n}=0$$

Como 0 < 1, essa série converge.

6. Divergente. É claramente uma série alternada cujos termos aumentam à medida que *n* vai aumentando. Mesmo que o numerador da série aumente em 1 a cada termo consecutivo, o denominador aumenta em mais de um fator de 3. Porém, a série não passa na segunda parte do Teste da Série Alternada, já que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}$$

O limite no infinito deve ser igual a 0 para que a série convirja, e isso não acontece.

7. Convergente. O teste da série alternada falha, pois o limite no infinito resulta em uma resposta indeterminada. Teste a convergência absoluta examinando a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^n}{3^n}$. Se você reescrevê-la como $\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$, torna-se óbvio que está lidando com uma série geométrica cuja razão é $\frac{2}{3}$. Como $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, o que significa que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 2^n}{3^n}$ também converge, pois converge absolutamente.

Capítulo 24

1. ∞. Comece com o teste da razão para convergência absoluta:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{5^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n x^n} \right|$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{5x}{n+1} \right|$$

À medida que *n* se aproxima do infinito, $\left|\frac{5}{n+1}\right|$ se aproxima de 0. Lembre-se de que o limite tem de ser menor que 1 para que a série seja convergente:

$$|0 \cdot x| < 1$$

Espere aí! Não importa o valor de *x*, você tem 0 à esquerda da desigualdade e 0 é *sempre* menor que 1. Assim, essa série convergirá apesar do valor de *x*, o que significa que ela converge no intervalo (–∞,∞).

2. (1,3]. Primeiro, encontre o raio de convergência usando o Teste da Razão para essa série de potência centrada em $x = 8$. O termo $(-1)^{n+1}$ é omitido graças aos sinais do valor absoluto:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-8)^{n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-8)^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n(x-8)}{n+1} \right| = |1 \cdot (x-8)|$$

Lembre-se, a série apenas converge quando $|x-8| < 1$. Como está na forma $|x - c| < r$, você sabe que o raio de convergência é 1, e a série converge no intervalo (8 – 1, 8 + 1) = (7,9). Agora, você deve confirmar se a série converge nos pontos finais. Comece com $x = 7$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1 \cdot -1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Trata-se de uma série harmônica divergente. Agora, verifique o outro ponto final, $x = 9$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1\cdot 1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Essa série converge de acordo com o teste da série alternada. Portanto, você deve incluir $x = 3$ no intervalo de convergência (1,3].

3. 1,284017. Não importa que derivada você obtenha de $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Portanto, o polinômio de Maclaurin será...

$$\begin{aligned} e^x &\approx \frac{1\cdot x^0}{0!} + \frac{1\cdot x^1}{1!} + \frac{1\cdot x^2}{2!} + \frac{1\cdot x^3}{3!} + \frac{1\cdot x^4}{4!} \\ &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

Coloque $x = 0{,}25$ no polinômio para obter a sua aproximação:

$$\begin{aligned} e^{0,25} &\approx 1 + (0{,}25) + \frac{(0{,}25)^2}{2} + \frac{(0{,}25)^3}{6} + \frac{(0{,}25)^4}{24} \\ &\approx 1{,}284017 \end{aligned}$$

Se estiver curioso, $e^{0,25}$ é aproximadamente 1,284025.

4. 2,049375. Você precisa encontrar a segunda derivada de $f(x) = x^{1/2}$ e cada derivada para $x = 4$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} & f(4) &= 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(4) &= \frac{1}{4} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4x^{3/2}} & f''(4) &= -\frac{1}{32} \end{aligned}$$

Coloque esses valores na expansão da série de Taylor em $c = 4$:

$$\begin{aligned} &f(4) + \frac{f'(4)(x-4)}{1!} + \frac{f''(4)(x-4)^2}{2!} \\ &= 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-4)}{1} + \left(-\frac{1}{32}\right)\frac{(x-4)^2}{2} \\ &= 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} \end{aligned}$$

Coloque $x = 4{,}2$ no polinômio:

$$\begin{aligned} \sqrt{4{,}2} &\approx 2 + \frac{4{,}2-4}{4} - \frac{(4{,}2-4)^2}{64} \\ &\approx 2 + \frac{0{,}2}{4} - \frac{(0{,}2)^2}{64} = 2{,}049375 \end{aligned}$$

Apêndice B

Glossário

Aceleração A taxa de mudança da velocidade.

Ângulos coterminais Ângulos que têm o mesmo valor de função, pois o espaço entre eles é um múltiplo do período da função.

Antiderivada O oposto da derivada; se *f(x)* é uma antiderivada de *g(x)*, então $\int g(x)dx = f(x)$.

Antidiferenciação O processo de criar uma antiderivada ou integral.

Aproximação linear A equação da linha tangente de uma função usada para ajudar a aproximar os valores de função chegando próximo ao ponto de tangência.

Assíntota Uma linha representando um valor inatingível que dá forma a um gráfico; como o gráfico não pode alcançar o valor, ele se curva em direção à linha, mas não faz a intersecção.

Campo de direções Uma ferramenta para visualizar a solução para a equação diferencial, uma coleção de linhas centradas em pontos cujas curvas são valores da equação diferencial avaliadas nesses pontos.

Cofunção Funções trigonométricas com o mesmo nome, com ou sem o prefixo "co-", como seno e cosseno, ou tangente e cotangente.

Concavidade Descreve a inclinação de uma curva; uma curva que consegue segurar água derramada sobre ela por cima do gráfico é côncava para cima, enquanto uma que não consegue segurar a água é côncava para baixo.

Conjugado Um binômio cujo sinal do meio é o oposto de outro binômio com os mesmos termos (por exemplo, $3 + \sqrt{x}$ e $3 - \sqrt{x}$ são conjugados).

Constante Um polinômio de grau 0; um número real.

Constante de integração A constante desconhecida que resulta de uma integral indefinida, normalmente escrita como *C* na sua solução; é uma parte exigida de todas as soluções de integrais indefinidas.

Continuidade Uma função $f(x)$ é contínua em $x = c$ se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Convergência absoluta Descreve uma série $\sum a_n$ se $\sum |a_n|$ convergir; é um método para determinar se uma série contendo termos negativos converge ou não se você não puder usar o Teste da Série Alternada.

Crescimento e decadência exponencial Uma população cresce ou decai exponencialmente se sua taxa de mudança for proporcional à população em si; por exemplo, $\frac{dP}{dt} = k \cdot P$, onde k é uma constante e P é o tamanho da população.

Crescimento logístico Começa rapidamente (inicialmente, parece com o crescimento exponencial), mas depois fica mais lento e se alinha ao valor do limite; fenômenos naturais, como gráficos sobre populações ou vendas, preferem esse padrão ao exponencial.

Cúbico Um polinômio de grau três.

Curva Valor numérico que descreve a curvatura da linha.

Decomposição parcial da fração Um método de reescrever uma fração como soma ou diferença de frações menores, cujos denominadores são fatores da original, denominador maior.

Derivada A derivada de uma função $f(x)$ em $x = c$ é a curva da linha tangente para f em $x = c$, normalmente escrita como $f'(c)$.

Descontinuidade de salto Ocorre quando não existem limites gerais no valor de x dado.

Descontinuidade essencial Veja *descontinuidade infinita.*

Descontinuidade infinita Descontinuidade causada por uma assíntota vertical (também chamada de descontinuidade essencial).

Descontinuidade não removível Um ponto de descontinuidade para o qual não existe limite (por exemplo, descontinuidade infinita ou de salto).

Descontinuidade removível Um ponto de descontinuidade para o qual existe um limite (por exemplo, ponto de descontinuidade).

Deslocamento Uma total mudança de posição, calculando apenas a posição inicial e final; se o objeto em questão mudar de direção a qualquer momento durante o intervalo, não reflete corretamente a distância total deslocada.

Diferenciação implícita Permite que você encontre a curva da linha tangente quando a equação em questão não pode ser resolvida por *y*.

Diferenciável Possuir uma derivada no valor específico de *x*; se uma função não possuir uma derivada no valor dado de *x*, é considerada não diferenciável neste local.

Divergente Uma sequência de séries que não converge (não é limitada e, por isso, não possui valor limite).

Domínio Conjunto de possíveis "entradas" para a função.

Equação de posição Um modelo matemático que dá a posição de um objeto em um tempo específico, *t*.

Equação diferencial Uma equação que contém uma derivada.

Equações paramétricas Pares de equações, normalmente na forma de "$x =$" e "$y =$", que definem pontos de um gráfico em termos de outra variável, normalmente t ou θ.

Expressão linear Um polinômio de grau 1.

Extensão O conjunto de possíveis resultados de uma função.

Família de soluções Qualquer solução matemática contendo "$+ C$"; de forma compacta, representa um número infinito de possíveis soluções, diferindo-se somente pela constante.

Fator repetido Um denominador elevado a uma potência; importante para o processo de decomposição parcial da fração.

Fatoração Reversão do processo de multiplicação. Os resultados do processo de fatoração podem ser multiplicados uns pelos outros para chegar à quantidade original.

Fatorial Número seguido de um ponto de exclamação, como 4!; é igual ao produto do número e todos os números inteiros relativos precedentes até, e incluindo, o 1: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Forma inclinação-intersecção Uma linha com curva m e ponto de intersecção com y b tem a equação $y = mx + b$.

Forma indefinida Uma expressão cujo valor não é claro; as formas indeterminadas mais comuns são $\pm\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ e $0 \cdot \infty$.

Forma ponto-inclinação Uma linha contendo o ponto (x_1,y_1) com a curva m tem a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Função Uma relação que faz com que cada entrada tenha exatamente uma saída relacionada.

Função acumulada Uma função determinada por uma integral definida; tem uma variação em um ou dois dos seus limites de integração.

Função periódica Uma função cujos valores se repetem após um intervalo determinado.

Função simétrica Uma função que parece uma imagem espelhada dela mesma, tipicamente cruzando o eixo x, o eixo y ou a origem.

Gráfico de sinais Uma reta numérica segmentada que descreve a direção de uma função e os sinais de sua derivada.

Grau O maior expoente em um polinômio.

Integração Processo de criação da antiderivada ou integral.

Integração por partes Permite que se reescreva a integral $\int u\,dv$ (onde u é uma função diferenciada e dv é integrada) como $uv - \int v\,du$.

Integral O oposto da derivada; se $f(x)$ é a integral de $g(x)$, então $\int g(x)dx = f(x)$.

Integral definida Integral que contém limites de integração; sua solução é um número real.

Integral indefinida Uma integral que não contém limites de integração; sua solução é a antiderivada da expressão (e deve conter uma constante de integração).

Intersecção Valor numérico no qual o gráfico encosta no eixo *x* ou *y*.

Intervalo de convergência O intervalo no qual uma série de potência converge; para encontrá-lo, primeiro deve-se determinar o raio de convergência *r* (para que a série possa convergir para todos os números entre $c - r$ e $c + r$) e, depois, checar as extremidades $c - r$ e $c + r$.

Limite A altura que uma função *pretende* alcançar em um dado valor de *x*, alcançando-a ou não.

Limite à direita A altura de uma função conforme se aproxima o valor dado de *x* para a direita.

Limite à esquerda A altura que uma função pretende atingir conforme se aproxima o valor de *x* da esquerda.

Limites de integração Números pequenos próximos ao sinal da integrada indicando os limites para calcular a área sob a curva; na expressão $\int_1^3 2x\,dx$, os limites de integração são 1 e 3.

Linha normal A linha perpendicular à linha tangente da função no ponto de tangência.

Linha secante Uma linha que corta um gráfico, normalmente fazendo a interseção em vários lugares.

Linha tangente Uma linha que encosta em uma curva somente uma vez no local indicado.

Máximo fator comum A maior quantidade pela qual todos os termos de uma expressão podem ser divididos igualmente.

Método da rosquinha Procedimento usado para calcular o volume de um sólido rotacionado mesmo que parte dele seja oca.

Método das cascas cilíndricas Um procedimento usado para calcular o volume de um sólido rotacionado, seja completamente sólido ou parcialmente vazio; é o único método para calcular volumes rotacionais que usa os raios paralelamente, e não perpendicularmente ao eixo de rotação.

Método de Euler Uma técnica usada para aproximar soluções para uma equação diferencial quando não se pode aplicar a separação de variáveis.

Método do disco Calcula o volume de um sólido rotacionado, contanto que não haja espaços vazios no sólido.

Não diferenciável Não possui uma derivada.

Número crítico Um valor de *x* que faz com que uma função seja igual a 0 ou se torne indefinida.

Número inteiro Um número sem casa decimal ou parte fracionada.

Otimizar Encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função de acordo com um conjunto de circunstâncias.

Parâmetro Uma variável na qual se inserem valores numéricos para encontrar coordenadas em um gráfico de equação paramétrica.

Período Quantidade de espaço horizontal necessária para que uma função periódica se repita.

Ponto de descontinuidade Ocorre quando um limite geral existe, mas o valor da função não é definido.

Ponto extremo Um ponto alto ou baixo na curva, um máximo ou mínimo, respectivamente; representa um valor extremo do gráfico, extremamente alto ou extremamente baixo, em relação aos pontos ao seu redor.

Ponto extremo absoluto O ponto mais alto ou mais baixo em um gráfico.

Ponto extremo relativo Ocorre quando esse ponto é mais alto ou mais baixo que todos os pontos na área imediatamente ao redor; visualmente, um máximo relativo é o pico da montanha no gráfico, e um mínimo relativo é o ponto mais baixo do gráfico.

Pontos de inflexão Pontos do gráfico onde a concavidade muda.

Quadrático Um polinômio de grau dois.

Quociente diferencial Uma de duas fórmulas que define uma derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ou $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Raio de convergência Se uma série de potência centrada em c tiver raio de convergência r, então essa série vai convergir com todos os valores de x no intervalo $|x - c| < r$; em outras palavras, todos os x no intervalo $(c - r, c + r)$ que, quando inseridos na série de potência, produzem séries convergentes.

Raio de rotação Uma linha que se estende do eixo de rotação para o limite da área que está sendo rotacionada.

Raio externo Raio de rotação usado no método que se estende do eixo rotacional para o limite externo da região.

Raio interno Raio de rotação usado no método que se estende do eixo rotacional para o lado interno da região.

Raio representativo Estende-se de uma extremidade de uma região até o lado oposto; usado no método das cascas cilíndricas.

Raiz irracional Um ponto de intersecção com x que não pode ser escrito como uma fração.

Rapidez Valor absoluto da velocidade.

Razão Na série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, r é a razão.

Recíproco A fração com seu numerador e denominador invertidos (por exemplo, a recíproca de $\frac{7}{4}$ é $\frac{4}{7}$.

Regra da cadeia A derivada da função composta $h(x) = f(g(x))$ é $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Regra da potência A derivada da expressão ax^n em relação ao x, onde a e n são números reais, é $(an)x^{n-1}$.

Regra da potência de integração A integral de uma única variável para a potência de um número real é encontrada adicionando-se 1 ao expoente existente e dividindo-se a expressão toda pelo novo expoente: $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (sendo que $n \neq 1$).

Regra de L'Hôpital Se um limite resultar em uma forma indeterminada após a substituição, você pode considerar as derivadas do numerador e do denominador da fração separadamente sem mudar o valor do limite (por exemplo, $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).

Regra de Simpson A área aproximada sob a curva $f(x)$ no intervalo fechado $[a,b]$ usando um número igual de subintervalos, n, é

$$\frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)\right).$$

Regra do Produto A derivada de $f(x)g(x)$, em relação ao x, é $f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Regra do Quociente Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, então $h'(x) = \frac{g(x) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x)}{(g(x))^2}$.

Regra do Trapézio A área aproximada sob uma curva $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ usando n trapézios é

$$\frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right).$$

Relação Uma coleção de números relacionados, normalmente descritos como uma equação.

Sempre contínua Uma função que é contínua a cada x no seu domínio.

Separação de variáveis Uma técnica usada para resolver equações diferenciais básicas; com ela, você move as diferentes variáveis da equação para lados diferentes do sinal de igual para integrar cada lado da equação separadamente.

Sequência Uma lista de números gerados por algumas regras matemáticas tipicamente expressas em termos de n; para construir a sequência, insira valores de números inteiros relativos consecutivos de n.

Sequência convergente Tem elementos que se aproximam, mas nunca alcançam, de algum valor limitante; se $\lim_{n \to \infty} a_n$ existir (se for algum número real, por exemplo), então a sequência $\{a_n\}$ converge.

Série A soma dos termos da sequência; a série indica quais termos devem ser adicionados pelos limites da notação sigma.

Série de Maclaurin A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$, que dá uma boa aproximação para valores de $f(x)$s próximos a $x = 0$; você só utiliza um número finito de termos, que resulta em um polinômio, em vez de uma série infinita.

Série de potência Uma série de potência centrada em $x = c$ tem a forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$.

Série de Taylor Séries que têm a forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$ e dão estimativas precisas das aproximações de $f(x)$ próximas a $x = c$.

Série positiva Uma série que contém somente termos positivos.

Série telescópica Séries que contêm um número infinito de termos e seus opostos, e o resultado é que quase todos os termos da série se cancelam.

Séries alternadas Séries cujos termos consecutivos se alternam em positivos e negativos.

Séries geométricas Uma série que tem a fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, onde a e r são constantes; converge se $0 < |r| < 1$

Séries harmônicas A série p divergente, com $p = 1$, por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Séries *p* Tem a fórmula $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, onde p é uma constante; converge se $p > 1$, mas diverge para todos os outros valores de p.

Soma à direita Uma aproximação de Riemann na qual as alturas dos retângulos são definidas pelos valores da função do lado direito de cada intervalo.

Soma à esquerda Uma aproximação de Riemann na qual as alturas dos retângulos são definidas pelos valores da função do lado esquerdo de cada intervalo.

Soma de Riemann Uma aproximação para a área sob a curva calculada pela adição de áreas de retângulos.

Soma média Uma aproximação de Riemann na qual as alturas dos retângulos são definidas por valores da função no ponto médio de cada intervalo.

Substituição *u* Técnica de integração que é útil quando uma função e sua derivada aparecem em uma integral.

Taxas relativas Um problema que usa uma taxa de mudança conhecida para computar a taxa de mudança para outra variável do problema.

Teorema de Rolle Se uma função $f(x)$ for contínua e diferenciável em um intervalo fechado $[a,b]$, e $f(a) = f(b)$, então existe um c entre a e b para que $f'(c) = 0$.

Teorema do Valor Extremo Se uma função $f(x)$ for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então $f(x)$ tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto em $[a,b]$.

Teorema do Valor Intermediário Se uma função $f(x)$ for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então, para cada número real d entre $f(a)$ e $f(b)$, há um c entre a e b, então $f(c) = d$.

Teorema do Valor Médio Se uma função $f(x)$ for contínua e diferenciável em um intervalo fechado $[a,b]$, então existe um ponto c, $a \le c \le b$, para que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Teorema do Valor Médio para Integração Se uma função $f(x)$ for contínua no intervalo [a,b], então existe um c, $a \le c \le b$, para que $(b - a) \cdot f(c) = \int_a^b f(x)dx$.

Teste da Comparação Dadas duas séries infinitas e positivas, $\sum a_n$ e $\sum b_n$, nas quais cada termo de $\sum a_n$ é menor ou igual ao termo correspondente em $\sum b_n$:

1. Se $\sum b_n$ convergir, então $\sum a_n$ converge também.
2. Se $\sum a_n$ divergir, então $\sum b_n$ diverge também.

Teste da Comparação do Limite Dada a série positiva infinita $\sum a_n$ e $\sum b_n$, se $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = N$, onde N é um número positivo e finito, então tanto $\sum a_n$ quanto $\sum b_n$ convergem ou divergem.

Teste da Integral A série positiva $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se a integral imprópria $\int_1^{\infty} a_n dn$ tiver um valor finito; se a integral divergir (aumentar sem limites), a série também diverge.

Teste da linha vertical Testa se o gráfico é ou não uma função; se alguma linha vertical puder ser desenhada através do gráfico e interceptá-lo mais de uma vez, então o gráfico em questão não pode ser uma função.

Teste da Raiz Se $\sum a_n$ for uma série infinita de termos positivos e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, então:

1. $\sum a_n$ converge se $L < 1$,
2. $\sum a_n$ diverge se $L > 1$ ou se $L = \infty$, e
3. $L = 1$, nenhuma conclusão pode ser tirada do Teste da Raiz (assim como o Teste do Raio).

Teste da Razão Se $\sum a_n$ for uma série infinita de termos positivos, e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ (onde L é um número real), então:

1. $\sum a_n$ converge se $L < 1$,
2. $\sum a_n$ diverge se $L > 1$ ou se $L = \infty$, e
3. Se $L = 1$, não se pode tirar nenhuma conclusão do Teste da Razão.

Teste da Série Alternada Se $\sum a_n$ for uma série alternada, e

1. Todos os termos da série forem menores ou iguais ao termo precedente; e
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

então $\sum a_n$ converge.

Teste do *n*-ésimo termo A série infinita $\sum a_n$ é divergente se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Valor médio da função O valor, *f(c)*, garantido pelo Teorema do Valor Médio para Integração é encontrado pela equação $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Velocidade A taxa de mudança de posição; inclui um componente de direção e, assim, pode ser negativa.

Índice

A

aceleração, 139–140
ângulos coterminais, 38
antiderivadas, regra da potência para integração, 174–176
aplicações de derivadas, 147
Aproximações lineares, 232–234
arco-secante, 192
arco-seno, 192
arco-tangente, 192
área de curvas, 178–180
áreas
  concavidade, 131–134
  côncavo para baixo, 132
  côncavo para cima, 132
  gráficos de sinais, 132–133
  pontos de inflecção, 132
  teste da segunda derivada, 133–134
A Sociedade do Anel, 184
assíntotas, 40
assíntotas horizontais, limites, 72–73
assíntotas verticais, limites, 71–72
avaliação de limites, métodos alternativos, 70–71
avaliação (limites)
  alternado, 70–71
  conjugação, 68
  fatoração, 67
  substituição, 66
avaliando limites, 65, 96

C

calculando inclinação, 91–94
calculando inclinações, 89
calculando valores ótimos, 6
cálculo de áreas com formas bizarras, 4
cálculo de valores ótimos, 6
Campo de direção, 234–237
círculos (valores de círculos unitários), 44–47
círculo unitário, valores, 44–47
coeficiente principal, 73
comparação de limites, 255–256
completando o quadrado, 22–23, 193–194
completando o quadrado, integração, 193–194
composição de funções, 26
comprimento de arco (integração), 215–217
concavidade, 131–132
côncavo para baixo, 132
côncavo para cima, 132
conjugação, 68
contínua
  definindo características de, 79–80
Convergência Absoluta, 261–262
cossecante, 43–44
cossecante, funções, 43–44
cosseno, 39–41
cosseno, funções, 39–41
cotangente, 41–42
cotangente, funções, 41–42
crescimento e declínio exponencial, 225–228
crescimento logístico, 226–228
cubos perfeitos, 20
curvas, integrais definidas, 178–180

D

decomposição parcial de fração, 201–203
definida por partes, 26–27
derivadas, 120–122, 191
  descontinuidade, 81–87
  infinito, 84–85
  ponto, 83–84
  salto, 81–83
derivadas e integrais, 172
derivadas paramétricas, 120–121
derivadas trigonométricas, 191–192
descontinuidade, 102
  derivadas, 102–103
  descontinuidade de salto, 81–83
  descontinuidade infinita, 84–85

descontinuidade removível versus não removível, 84–85
funções, 79
ponto de descontinuidade, 83–84
descontinuidade de salto, 81–83
Descontinuidade essencial. Veja descontinuidade infinita
descontinuidade infinita, 84–85
descontinuidade não removível, 85–86
descontinuidade removível, 85–86
deslocamento total, 183
dicotomia de Zeno, 7
diferenciação implícita, 115–117
diferenciáveis, 106
distância percorrida, 183–185
distância percorrida (integrais definidas), 183–185
divergência de séries, 245
divisão longa, 189–190
domínios, 26–27

E

equações, 114–115
equações da linha tangente, 114–115
equações diferenciais, 221
equações lineares. Veja equações lineares
equações normais de reta, 114
equações paramétricas, 216–217
equações quadráticas, 21–23
fatoração, 21–22
equações retangulares, 215–216
equações x simétricas, 28
equações y simétricas, 28–29
existência, 60–61
expoentes de divisão, 17
expoentes negativos, regras exponenciais, 17
expoentes (regras exponenciais), 16–17
divisão, 17
expoentes negativos, 17
expressões, 17
expressões (regras exponenciais), 17
multiplicação, 17
extremos, 10
extremos absolutos, 125, 130
extremos relativos, usando derivadas em gráficos
classificação, 125–126
máximo relativo, 129
mínimo relativo, 129
números críticos, 125–126

F

família de soluções, 224
fatoração, 19–20, 67, 96
fatoração de polinômios, 20
fatorando cubos perfeitos, 20
fatorando quadrados perfeitos, 20
fator comum (máximo), fatoração de polinômios, 19
forma inclinação-intersecção (equações lineares), 14
forma padrão, 14
forma padrão (equações lineares), 14
forma ponto-inclinação, 15–16
forma ponto-inclinação (equações lineares), 15–16
forma ponto-intersecção, 14
forma retangular, convertendo funções paramétricas, 33
formas indeterminadas, limites, 143–144
fórmula quadrática, 23
fórmulas de duplo ângulo, 49–50
fórmulas de duplo ângulo (identidades trigonométricas), 49–50
frações, 187, 187–188
função cossecante, 43–44
função cosseno, 39
função cotangente, 40
função domínio, 26–27
funções, 79
funções contínuas, definição de características, 79–80
funções de acumulação, 185–186
funções definidas por partes, 27–28
funções de variação, 26–27
funções diferenciáveis, 106
funções inversas, 31–32, 117
construindo, 31–32
funções logarítmicas naturais, integração por partes, 199
funções não diferenciáveis, 105, 109
funções periódicas, 39–45
funções periódicas (trigonometria), 39–45

funções periódicas (trigonometria, função)
cossecante, 43–44
cosseno, 39–40
cotangente, 41–42
secante, 42–43
seno, 39
tangente, 40–41
funções secante, 42–43
funções seno, 39
funções simétricas, 28
Funções simétricas. Veja funções simétricas
funções tangenciais, 40–41
funções trigonométricas, 170–171
funções trigonométricas inversas, 191–192

G

gráfico de sinais, 132–133
usando derivadas em gráficos, 127–129
gráficos
lista de funções básicas, 28–29
gráficos de sinais, 127–129

I

identidades, 46–50
identidades pitagóricas, 47–49
identidades (trigonométricas), 46–50
identidades trigonométricas, ângulo duplo, 49–50
importância da prática, 275
imprópria, 208
inclinação
calculando, 4
inclinação de linhas, 16–17
inclinação da linha, 4, 16–17
inclinação, linha secante, 90
infinito, relação com limites
assíntotas horizontais, 72–73
assíntotas verticais, 71–72
números inteiros, 14
influências do passado, 7–8
instantânea, 139
integração, divisão longa, 189–190
integração por partes, 198
integrais, 170–173
integrais definidas, 171, 183–185
integrais impróprias, 216–218
interpretação geométrica, 180–182
intersecção com o eixo x, 5
intervalo de convergência, 267–268

L

Leibniz, Gottfried Wilhelm, 10
limite especial, 74–75
limite lateral
à direita, 58–59
à esquerda, 58–59
Limites. Veja limites
limites, assíntota horizontal, 72–73
limites, assíntota vertical, 71–72
limites de existência, 60–61
limites não existentes, 61–64
linha normal, 115
linha secante, 90
linhas tangentes verticais, 109–110
linha tangente, 90–93
lista de funções básicas, 28–29

M

Maclaurin, 268–271
máximo absoluto, 130–132
máximo fator comum, 20
média, 161–162
Método da Conjugação, avaliando limites, 68
Método da Rosquinha, 211–213
Método das Cascas Cilíndricas, 213–215
Método da Substituição, avaliando limites, 66
Método de Euler, 237–241
Método do Disco, 208–211
Métodos, 194
Métodos de Avaliação alternativos, 70–71
Método Tabular, 200–201
Método Tabular, integração por partes, 200–201
mínimo absoluto, 130–132
movimento
derivadas paramétricas, 120–121
equação de posição, 136–137
equações lineares normais, 119
movimento de projéteis, 140–141
multiplicação, expoentes, 17

N

não diferenciável, 109
não existência, 61–62
negativa, 138
Newton, Sir Isaac, 9–10
notações, 57
notações, limites, 57
números críticos (extremos relativos), 124–125

O

origens históricas, 6–10
otimização, 151–152
otimização, aplicações de derivadas, 151–152

P

padrões especiais de fatoração, 20
paramétrico convertido à forma retangular, 33
  exemplos de, 33
pitagórico, 149
polinômios, 19, 190
polinômios de Maclaurin, 268–271
polinômios de Taylor, 272–274
polinômios, graus, 73
ponto de descontinuidade, 83–84
ponto de tangência, 90
ponto de tangência (linha tangente), 90
pontos de inflexão, 132
pontos extremos relativos, 124–126, 133
pontos extremos relativos (teste da segunda derivada), 133–134
posição, 136–137
potência
  formas bizarras, cálculo de áreas, 4
problemas práticos
  Capítulo 2, 293
  Capítulo 3, 294
  Capítulo 4, 294
  Capítulo 5, 295
  Capítulo 6, 295
  Capítulo 7, 296
  Capítulo 8, 296
  Capítulo 9, 297
  Capítulo 10, 298
  Capítulo 11, 299
  Capítulo 12, 299
  Capítulo 13, 300
  Capítulo 14, 301
  Capítulo 15, 302
  Capítulo 16, 303
  Capítulo 17, 305
  Capítulo 18, 306
  Capítulo 19, 308
  Capítulo 20, 311
  Capítulo 21, 312
  Capítulo 22, 314
  Capítulo 23, 315
  Capítulo 24, 317

Q

quadrados perfeitos, 20
quadrática, 21–23, 23
  completando o quadrado, 22–23
  fatoração, 22–23
  fórmula quadrática, 21
  relações, 21, 23
quociente diferencial, 95
quocientes diferenciais
  alternativo, 96–98
  avaliando limites, 96
  derivadas, 89
  fórmulas, 97

R

raio de convergência, 264–267
raio de rotação, 208–209
raio externo, 211
raio representativo, 213
raiz irracional, 5
rapidez e velocidade, 138
recíprocos, 42
Regra da Cadeia, 107
Regra da Cadeia, derivadas, 107–108
regra da potência, 104
regra da potência para integração, 172
Regra de L'Hôpital, 144–145
regra de Simpson, 165–166
regra do produto, 105, 199
regra do quociente, 187
regra do quociente, derivadas, 187
regra do trapézio, 162–165
relação com o infinito
  à direita, 58–59
  assíntotas horizontais, 72–73
  assíntotas verticais, 71–72
relação entre área e integrais, 171–172
relações, 26, 26–27
removível versus não removível, 84–85
resolvendo equações, 50–51
resolvendo trigonométricas, 50–51
respostas, problemas práticos, 293–297
retângulos (soma de Riemann), 158
Rolle, 148

S

secante, 90
secante, funções, 42–43
sempre contínua, 82
seno, 39
seno, funções, 39
separação, 188–189
separação de variáveis, 222–223
sequência convergente, 244–245
série, 243–250
série alternada, 259–261
série convergente (série de potência), 264–267
série de Maclaurin, 268–271
Série de Taylor, 272–274
série geométrica, 248–249
série infinita, 245
série p, 249
séries alternadas, termos negativos, 259–261
série telescópica, 249–250
simetria de origem, 28
sólidos rotacionais, método do disco, 208–211
soluções, 223–225
  equações diferenciais, 221–223
  específica, 224–225
  família de, 224
  problemas práticos, 293–297
Soluções, 293–297
soluções específicas, 224–225
  soma à direita, 159–161
  soma à esquerda, 159–161
soma de Riemann
  à direita, 159–161
  à esquerda, 159–161
Soma de Riemann, 158–163
soma média, 161–162
somas à direita (soma de Riemann), 159–161
somas à esquerda, 159–161
Strachey, Barbara, 184
subintervalos, regra de Simpson, 165–166
substituição, 66
substituição u, 174–175, 189–190

T

tangente, 40–41, 90–93
tangente, funções, 40–41
tangente vertical, 103–104
taxa de variação média, 191–192
taxas relacionais, 148–150
taxas relacionais, aplicações de derivadas, 148–150
Taylor, 272–274
telescópica, 249–250
Teorema de Pitágoras, 149
Teorema de Rolle, 148
Teorema do Valor Extremo, 129–131
Teorema do Valor Intermediário, 87
Teorema do Valor Médio, 146–147, 182–183
Teorema Fundamental, 171–173
teorema fundamental, derivadas e integrais, 172–174
teoremas especiais de limite, 74–75
termos negativos, 259–261
teste da comparação do limite, série, 255–256
teste da linha vertical, 28
teste da linha vertical (funções), 28
teste da raiz, 258–259
teste da razão, série, 257–258
Teste da segunda derivada. Ver teste da segunda derivada
  usando para desenhar concavidade em gráficos, 131–134
teste de divergência do n-ésimo termo, 246–247, 247–248
teste integral, série, 252–253
testes de comparação, séries, 253–255
testes de convergência, 251–252
  comparação, 253–255
  geométrica, 248–249
  infinitas, 247
  integral, 252–253
trigonométrica, 170–171, 191–192

U

usando derivadas em gráfico
  concavidade, 131–134

V

valores médios de funções, 4
valores médios, funções, 5
valores ótimos, 6
valor intermediário, 87
valor médio, 4–5, 146–147
valor médio, funções, 5
variação, 26–27
variáveis (equações diferenciais), 222–223
velocidade, 138–139
velocidade instantânea, 139
velocidade média, 138

velocidade negativa, 138
versus rapidez, 138
vértice (derivadas), 102–103
vértice no gráfico, 102–103
visualizando concavidade, 132–133
visualizando gráficos, 5
volumes (sólidos rotacionais), 208–215

X

x simétrico, 28

Y

y = cos x (cosseno), 39, 41
y = cot x (cotangente), 41–42
y = csc x (cossecante), 43–44
y = sec x (secante), 42–43
y = sen x (seno), 39
y simétrico, 28–29
y = tan x (tangente), 40–41